Лекция 10. Приложения определённого интеграла.

Приложения определённого интеграла

1. Метод интегральной суммы

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объём тела, масса стержня с переменной плотностью и т. д.), зависящей от переменной $x \in [a,b]$. Предполагается, что эта величина аддитивна, т. е. при разбиении отрезка $[a,b]$ точкой $c \in [a,b]$ на части значение величины A, соответствующее всему отрезку $[a,b]$, равно сумме её значений, соответствующих отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$

Для решения таких задач будем использовать метод интегральной суммы:

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$. В соответствии с этим величина A разобьётся на n «элементарных слагаемых»: $A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$.

2. Представим каждое «элементарное слагаемое» в виде $\Delta A_i \approx f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина i-го отрезка, c_i – произвольная точка этого отрезка, $f(x)$ – функция, определяемая из условия задачи. Тогда получим: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – приближённое значение величины A в виде интегральной суммы.

3. Чем больше n, тем точнее приближение. Пусть $n \to \infty$ так, чтобы $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$. Тогда предел интегральной суммы при $n \to \infty$ даст точный результат:

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

2. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \ge 0$ (рис. 1). Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией. Найдём площадь этой трапеции методом интегральной суммы.

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей. Тогда площадь $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$, где ΔS_i – площадь «элементарной» криволинейной трапеции с основанием Δx_i.

2. Величина ΔS_i приближённо равна площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$, т. е. $\Delta S_i \approx f(c_i)\Delta x_i$. При этом площадь всей криволинейной трапеции приближённо равна площади ступенчатой фигуры S_n: $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$.

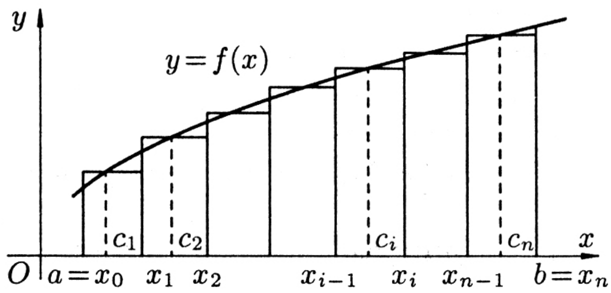

Рисунок 1

3. С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, т. е. площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox ($f(x) < 0$), то её площадь определяется по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \tag{3}$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис. 2) можно найти следующим образом:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \tag{4}$$

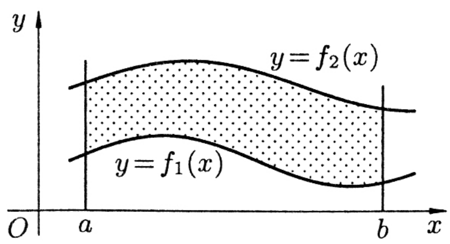

Рисунок 2

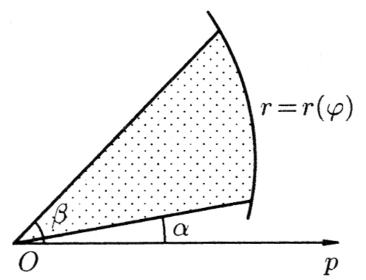

Рисунок 3

Площадь криволинейного сектора (рис. 3), ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi \tag{5}$$

Заметим, что площадь всякой плоской фигуры в прямоугольной (полярной) системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций (секторов).

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0;3]$.

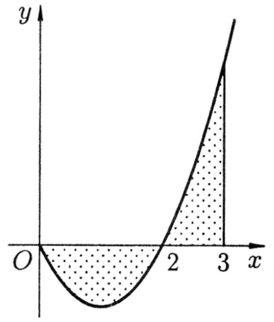

Рисунок 4.

Фигура имеет вид, изображённый на рис. 4. Поскольку фигура расположена как выше, так и ниже оси Оx, используем формулу (3):

$$S = \int_0^3 \left| x^2 - 2x \right| dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)\Bigg|_2^3 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

3. Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая AB (рис. 5) – график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, где $a \le x \le b$. Вычислим длину l этой кривой, используя метод интегральной суммы.

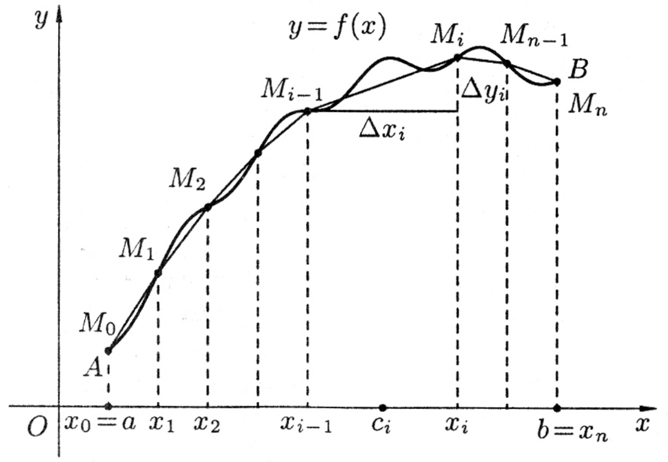

Рисунок 5

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей. Тогда длина кривой $l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$, где Δl_i – длина «элементарной» дуги, соответствующей отрезку Δx_i.

2. Величина Δl_i приближённо равна длине хорды $M_{i-1}M_i$, которую можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta l_i \approx M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\text{, где } \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Длина всей кривой AB приближённо равна длине ломаной $M_0 M_1 M_2 ... M_{n-1} M_n$:

$$l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i = L_n.$$

3. С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения кривой ломаной и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение длины дуги l принимается предел, к которому стремится длина ломаной L_n, когда n неограниченно возрастает:

$$l = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i \ ,$$

т. е. длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad (6)$$

Если кривая AB задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, то её длина может быть вычислена по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi \qquad (7)$$

Пример. Найти длину l дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$ между точками $O(0;0)$ и $A(1;\frac{1}{2})$ (рис. 6).

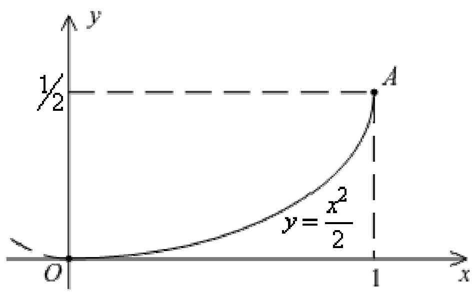

Рисунок 6

Имеем $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $f'(x) = x$. Применяя формулу (6), находим:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))\ .$$

4. Вычисление объёма тела

Пусть требуется найти объём V тела, причём известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис. 7).

Применим метод интегральной суммы.

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей. Тогда объём $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$, где ΔV_i – объём «элементарного» тела, соответствующего отрезку Δx_i.

2. Величина ΔV_i приближённо равна объёму цилиндра с высотой Δx_i и площадью основания $S(c_i)$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$, т. е. $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. При этом объём всего тела приближённо равен объёму «ступенчатого» тела V_n: $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = V_n$.

3. С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения тела ступенчатым и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение объёма V тела принимается предел, к которому стремится объём ступенчатого тела V_n, когда n неограниченно возрастает: $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$, т. е. объем тела вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (8)$$

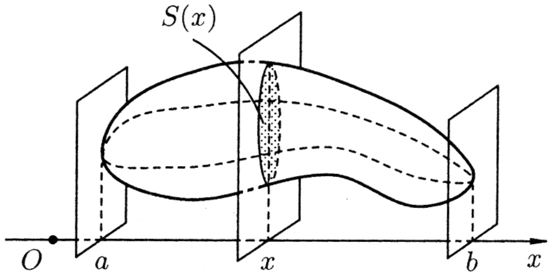

Рисунок 7

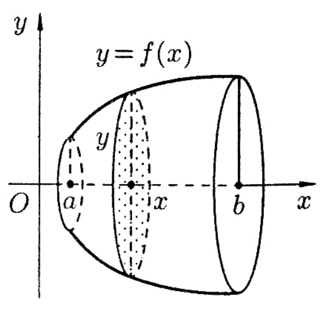

Рисунок 8

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \ge 0$, отрезком $a \le x \le b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8). Полученная при вращении фигура называется телом вращения. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через произвольную точку x оси Ox ($x \in [a;b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi \cdot y^2$.

Применяя формулу (8), получаем формулу объема тела вращения:

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx \qquad (9)$$

Пример. Линия с уравнением $y = \cos x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ вращается вокруг оси Ox. Найти объём V полученного тела вращения (рис. 9).

Применяя формулу (9), находим:

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

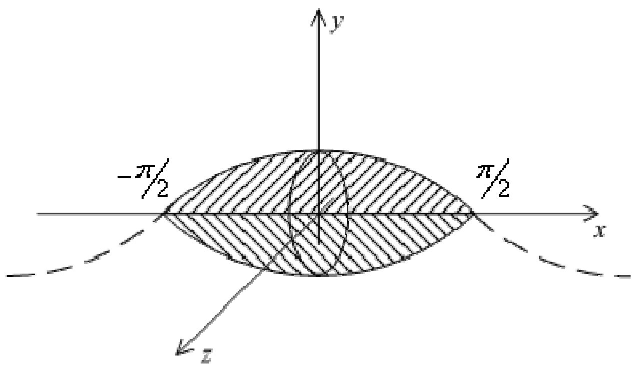

Рисунок 9

5. Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы $\overline{F}$, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где x – абсцисса движущейся точки M.

Найдём работу A силы $\overline{F}$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$) методом интегральной суммы.

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей. Тогда работа $A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$, где ΔA_i – работа, совершаемая силой $\overline{F}$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

2. Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то сила $\overline{F}$ на этом отрезке изменяется незначительно. Её можно приближённо считать постоянной и равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1};x_i]$. Поэтому $\Delta A_i \approx F(c_i)\cdot \Delta x_i$ (как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1};x_i]$). При этом приближённое значение работы A на всём отрезке $[a;b]$ есть $A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$.

3. С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения возрастает. Поэтому за точное значение работы A принимается предел $A = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$, т. е. работа силы $\overline{F}$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx .$$

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)dt ,$$

а масса m неоднородного стержня на отрезке $[a;b]$ равна определённому интегралу от плотности $\rho(x)$:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx$$

Пример. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)dt = (5t^2 + 2t)\Big|_0^4 = 88 \text{ (м).}$$