Лекция 15. Дифференциальные уравнения первого порядка (продолжение)

4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0 \tag{5}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, то есть данное уравнение можно переписать в виде $dU(x, y) = 0$. Отсюда общий интеграл будет $U(x, y) = c$.

Пусть функции $A(x, y), B(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области, а также имеют непрерывные частные производные по переменным x, y. Тогда для того чтобы уравнение (5) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условия $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$.

Общим интегралом уравнения (5) является

$$\int_{x_0}^{x} A(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} B(x_0, y)dy = c,$$

или

$$\int_{x_0}^{x} A(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} B(x, y)dy = c,$$

где $(x_0, y_0) \in D$, где $D -$ область определения функций $A(x, y), B(x, y)$. В этих интегралах интегрирование ведется по одной из переменной, при этом вторая считается постоянной.

Особых решений уравнение в полных дифференциалах не имеет.

5. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли и уравнение Риккати

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{6}$$

Если правая часть (6) равна нулю, то это уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Если в уравнении (6) функции $p(x)$ и $q(x)$ являются постоянными числами, то уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами*.

Для нахождения общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка рассмотрим два метода.

Метод вариации постоянной. В первую очередь находим общее решение $y = ce^{-\int p(x)dx}$ однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Затем предполагаем, что c является функцией от переменной x, и ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Дифференцируя, находим

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив два последних равенства в уравнение (6), получим

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

отсюда найдем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными на неизвестную функцию $c(x)$:

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Его решением является

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

где c – произвольное постоянное число.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (6) запишется в виде

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c).$$

Метод подстановки. В этом случае общее решение уравнения (6) ищем в виде

$$y(x) = u(x)v(x), \text{ отсюда } y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Подставив два последних равенства в уравнение (6), получим

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x).$$

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u'(x) + u(x)p(x) = 0, \tag{7}$$

тогда

$$u(x)v'(x) = q(x). \tag{8}$$

Уравнение (7) является уравнением с разделяющимися переменными, нам достаточно найти любое его частное решение, например

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Общим решением уравнения (8) будет

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

где

c – произвольное постоянное число.

Следовательно, общее решение уравнения (6) запишется в виде

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c).$$

Уравнение вида

$$x' + p(y)x = q(y)$$

также является линейным, но относительно неизвестной функции $x(y)$, теперь y считается переменной, при этом $x' = dx/dy$. Методы, рассмотренные выше, применимы и в этом случае.

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ (n \neq 1) \tag{9}$$

называется *уравнением Бернулли.* Если обе его части разделить на функцию y^n и сделать замену

$$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}},$$

то получим линейное уравнение на неизвестную функцию $z(x)$, которое решается изложенными выше методами. При $n > 0$ уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$. Это решение является частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$.

Также уравнение (9) можно решать методом подстановки, который еще называют методом Бернулли.

Уравнение вида

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

называется *уравнением Рикатти*. Если известно его какое-нибудь частное решение y_1, то с помощью подстановки

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

данное уравнение можно привести к линейному уравнению $z' - (p(x) + 2q(x)y_1)z = q(x)$.

6. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа и уравнение Клеро.

Это дифференциальные уравнения

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{10}$$

в которых производная y' явно не выражена. Один из способов решения такого уравнения – это разрешить его относительно y' и решить. Но в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ может быть многозначной, то есть y' может иметь несколько значений.

Рассмотрим случай, когда левая часть уравнения (10) является многочленом второй степени относительно y', то есть уравнение вида

$$y'^2 + 2A(x, y)y' + B(x, y) = 0\,.$$

Выразив отсюда y', получим

$$y' = -A(x, y) \pm \sqrt{A^2(x, y) - B(x, y)}\,.$$

Отметим, что подкоренное выражение может быть больше нуля в одной или нескольких областях D на плоскости Oxy, причем в каждой из областей последнее равенство определяет два дифференциальных уравнения в силу знака $\pm$. В этом случае через всякую точку области D проходят две интегральные кривые, причем эти кривые в точке не соприкасаются, так как в этой точке они имеют разные значения y'.

В тех областях, где подкоренное выражение меньше нуля, последнее уравнение не дает вещественных значений y', интегральных кривых там нет.

Если в уравнении (10) можно явно выразить y, то мы получим уравнение вида

$$y = f(x, y')\,. \tag{11}$$

Введя параметр $y' = p$, получим

$$y = f(x, p)\,.$$

Продифференцируем последнее равенство по переменной x:

$$y' = f_x'(x,p) + f_p'(x,p)p',$$

отсюда

$$p = f_x'(x,p) + f_p'(x,p)p', \text{ или } (p - f_x'(x,p))dx - f_p'(x,p)dp = 0.$$

Если решение последнего уравнения найдено как $x = t(p,c)$, то $y = f(t(p,c),p)$, следовательно, получим общее решение уравнения (11) в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = t(p,c), \\ y = f(t(p,c),p). \end{cases}$$

Если же решение найдено в виде $p = r(x,c)$, то общее решение уравнения (11):

$$y = f(x, r(x,c)).$$

Отметим, что частными случаями уравнения (11) являются уравнение Лагранжа

$$y = A(y')x + B(y'),\ A(y') \neq B(y')$$

и уравнение Клеро

$$y = xy' + D(y'),\ D(y') \neq ay' + b.$$

Они также решаются введением параметра $y' = p$.

Пусть в уравнении (10) можно явно выразить x, тогда получим уравнение вида $x = f(y, y')$. Оно решается также с помощью подстановки $y' = p$.