Лекция 16. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Общие понятия

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.* Здесь (n) означает порядок производной. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется такая функция $y = y(x)$, определенная на некотором промежутке (a, b), которая обращает уравнение (1) в тождество. Ясно, что в этом случае $y = y(x)$ должна иметь в (a, b) непрерывные производные до n-го порядка и при любом значении переменной x из промежутка (a, b) точка с координатами $(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)})$ должна принадлежать множеству B, на котором определена функция f.

Общим решением уравнения (1) называется такая функция

$$y = y(x, c_1, c_2,..., c_n),$$

которая при любых значениях постоянных $c_1, c_2,..., c_n$ является решением этого уравнения.

Если общее решение записано в неявном виде

$$q(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом*. Иногда решение записывается в *параметрической форме*:

$$x = x(t, c_1, c_2,..., c_n), \quad y = y(t, c_1, c_2,..., c_n).$$

Задача нахождения решения уравнения (1) при заданных *начальных условиях*

$$y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_0',\, y''(x_0)=y_0'',\dots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

называется *задачей Коши.* Здесь $x_0, y_0, y_0', y_0'',\dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Геометрически это означает, как и раньше, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0).

Вопрос о *существовании и единственности решения задачи Коши* дает приведенная ниже теорема.

Теорема 1. Если функция $f(x, y, y', y'', y''',\dots, y^{(n-1)})$ в уравнении (1) непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'},\dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в области D изменения своих аргументов, то в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', y_0'',\dots, y_0^{(n-1)})\in D$ существует, и притом единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_0',\, y''(x_0)=y_0'',\dots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Чтобы найти решение уравнения (1) с заданными начальными условиями с помощью формулы общего решения, поступают следующим образом:

1) находят у функции $y=y(x, c_1, c_2,\dots, c_n)$ производные по переменной x до $(n-1)$-го порядка, получают систему

$$\begin{cases} y(x)=y(x, c_1, c_2,\dots, c_n), \\ y'(x)=y'(x, c_1, c_2,\dots, c_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x)=y^{(n-1)}(x, c_1, c_2,\dots, c_n); \end{cases}$$

2) подставляют в полученную систему, соответственно, вместо $x, y, y',\dots, y^{(n-1)}$ числа $x_0, y_0, y_0', y_0'',\dots, y_0^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_0=y(x_0, c_1, c_2,\dots, c_n), \\ y_0'=y'(x_0, c_1, c_2,\dots, c_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2,\dots, c_n); \end{cases}$$

3) решают последнюю систему уравнений относительно $c_1, c_2,\dots, c_n$;

4) подставляют найденные значения $c_1, c_2,\dots, c_n$ в формулу общего решения и тем самым находят искомое решение, которое называется *частным решением*.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.*

2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Иногда уравнение n-го порядка интегрируется путем сведения его к уравнению более низкого порядка. Рассмотрим некоторые из таких уравнений.

а) Уравнение, содержащее независимую переменную и производную порядка n.

Одно из простейших уравнений n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} = f(x). \tag{2}$$

Общее решение его находится путем последовательного интегрирования, в итоге получим

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x) dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_{n-1} x + c_n .$$

Уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

можно разрешить относительно $y^{(n)}$ и получить одно или несколько уравнений (2), интегрирование которых даст общий интеграл рассматриваемого уравнения. Если последнее уравнение неразрешимо относительно $y^{(n)}$, то, возможно, удастся ввести замену $x = a(t)$ так, чтобы $F(x, y^{(n)}) = 0$ записалось в виде $y^{(n)} = b(t)$. В этом случае общее решение скорее всего найдется в параметрической форме. Интегрируя $y^{(n)} = b(t)$ первый раз с учетом того, что $dx = a'(t)dt$, найдем

$$y^{(n-1)} = \int b(t) a'(t) dt + c_1 \equiv b_1(t, c_1) .$$

Продолжив подобное интегрирование, получим общее решение уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ в параметрическом виде $x = a(t)$, $y = b_n(t, c_1, c_2, ..., c_n)$.

б) Уравнение, не содержащее искомой функции.

Пусть уравнение высших порядков представлено в виде

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0\,, \quad (1 \le k < n)\,, \tag{3}$$

то есть не содержит функцию y и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно. В этом случае очевидна замена $y^{(k)} = z(x)$, которая позволяет понизить порядок уравнения на k единиц. При этом получится уравнение $F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0$. Допустим, мы смогли его проинтегрировать и получить общее решение $z = q(x, c_1, c_2,..., c_{n-k})$, тогда

$$y^{(k)} = q(x, c_1, c_2,..., c_{n-k})\,,$$

которое является уравнением вида (2). Таким образом, путем k - кратного интегрирования находим общее решение уравнения (3), при этом у нас еще добавится k произвольных постоянных, поэтому в ответе в итоге их будет n штук.

в) Уравнение, не содержащее независимой переменной.

Это уравнение вида

$$F(y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0\,. \tag{4}$$

Это довольно непростое уравнение, можно понизить его порядок лишь на единицу с помощью подстановки $y' = p(y)$. При этом y, как мы видим, принимается за переменную. Пересчитаем остальные производные:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p\,,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \left(\frac{d^2 p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)p$$

и т. д. Отметим, что функция $p(y(x))$ дифференцировалась по x, как сложная функция. Подставив эти производные в (4), получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка на новую неизвестную функцию $p(y)$. Предположим, что решением полученного уравнения будет $p = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, следовательно,

$$y' = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1}).$$

Проинтегрировав последнее уравнение, найдем

$$x + c_n = \int \frac{dy}{q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})}.$$

Заметим, что, принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решение $y = \text{const}$. Чтобы этого не допустить, следует проверить, является ли оно решением уравнения (4), путем непосредственной подстановки $y = \text{const}$ в это уравнение (4).

г) Уравнение в точных производных.

Это уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0,$$

в котором левая часть может быть представлена в виде производной от некоторой функции $R(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)})$, то есть

$$\frac{d}{dx} R(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}) = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство, мы получим новое уравнение

$$R(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}) = c_1,$$

порядок которого будет ниже на единицу, чем порядок уравнения в точных производных.

Заметим, без доказательства, что уравнение вида $y'' + g(x)y' + g'(x)y = f(x)$ всегда является уравнением в точных производных.

Часто дифференциальное уравнение $F(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0$ не является уравнением в точных производных. Но иногда удается подобрать функцию $d(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)})$, называемую *интегрирующим множителем*, что после умножения на нее дифференциальное уравнение становится уравнением в точных производных.

д) Уравнение, однородное относительно функции y *и ее производных.*

Это уравнение

$$F(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0,$$

в котором функция F является однородной относительно функции y и ее производных, то есть выполняется равенство

$$F(x, ty, ty', ty'', ty''',..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}),\ t \neq 0.$$

Порядок уравнения в этом случае можно понизить на единицу с помощью подстановки $y' = yz$, тогда

$$\begin{cases} y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' = y'(z^2 + z') + y(z^2 + z')' = y(z^3 + 3zz' + z''), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = yr(z, z',..., z^{(n-1)}). \end{cases}$$

Здесь $z(x)$ – новая неизвестная функция. Подставив все производные в уравнение $F(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0$, найдем

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z), y(z^3 + 3zz' + z''),..., yr(z, z',..., z^{(n-1)})) = 0.$$

Так как функция F является однородной, из последнего равенства получим

$$y^k F(x,1,z,z^2+z,z^3+3zz'+z'',...,r(z,z',...,z^{(n-1)}))=0.$$

Разделив последнее равенство на y^k, получим уравнение $(n-1)$-го порядка на функцию $z(x)$. Если, решив его, мы найдем $z=q(x,c_1,c_2,...,c_{n-1})$, то, вернувшись к замене $z=\dfrac{y'}{y}$, получим

$$\frac{dy}{y}=q(x,c_1,c_2,...,c_{n-1})dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем общее решение $y=c_n e^{\int q(x,c_1,c_2,...,c_{n-1})dx}$.