Лекция 8. Определённый интеграл.

Определенный интеграл Римана

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Произведем разбиение R отрезка $[a,b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Выберем на каждом из получившихся отрезков по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Составим сумму

$$S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

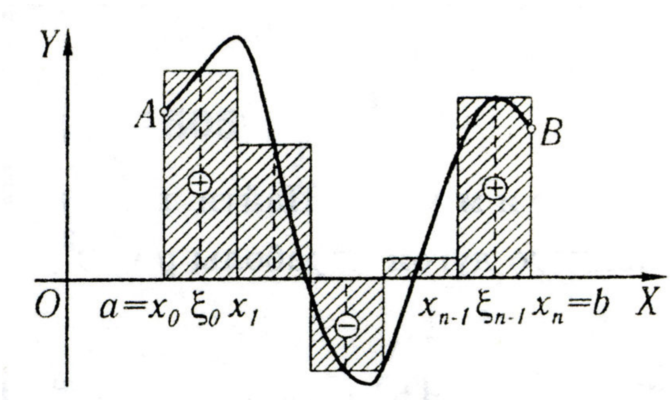


Рисунок .1

Сумма S_R называется *интегральной суммой Римана*, соответствующей разбиению R. Геометрически S_R представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис. 1).

Пусть $n \to \infty$ так, чтобы все $\Delta x_i \to 0$, т.е. $\max \Delta x_i \to 0$. Если при этом последовательность интегральных сумм S_R стремится к конечному пределу, не зависящему от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек ξ_i, то этот предел называется *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_R = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \tag{1}$$

Если существует определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема* на этом отрезке.

Теорема 1. Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Таким образом, ограниченность является необходимым условием интегрируемости. Достаточным условием интегрируемости является непрерывность функции.

Теорема 2. Если функция непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

На самом деле интегрируемыми будут также функции, имеющие на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода. Такие функции называются кусочно-непрерывными.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется *кусочно-непрерывной* на этом отрезке, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) и существуют конечные пределы на концах интервала

$$\lim_{x \to x_i + 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_{i+1} - 0} f(x)\,.$$

Теорема 3. 1) Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a,b]$ и $\forall x \in (a,b)$ $f(x) = g(x)$. Тогда если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то и $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Таким образом, изменение значения функции на концах отрезка (а, вообще говоря, и в любом конечном числе точек отрезка) не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если, конечно, данная функция интегрируема.

1. Свойства определенного интеграла

1. Свойство аддитивности: Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $a<c<b$, то $f(x)$ интегрируема и на $[a,c]$ и на $[c,b]$, и при этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Справедливо следующее:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Свойство линейности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $\alpha f(x)+\beta g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$, и при этом

$$\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

4. Свойство монотонности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$, и при этом

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. Теоремы о среднем

Теорема 4. (Первая теорема о среднем). Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{9.2}$$

Доказательство. Так как $\forall x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$, то по свойству монотонности

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx. \tag{9.3}$$

По определению определенного интеграла (9.1) и по свойству линейности имеем

$$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = m \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_{i+1} - x_i\right) =$$

$$= m\left(x_n - x_0\right) = m(b-a).$$

Аналогично $\int_a^b M dx = M(b-a)$. Тогда из (9.3) получаем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

что и требовалось.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует число $\xi \in [a,b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

В самом деле, так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$ и по свойству функций, непрерывных на отрезке, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, тогда справедлива первая теорема о среднем. Разделим неравенство (9.2) на $b-a>0$, получим

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M .$$

По свойству функций, непрерывных на отрезке, существует $\xi \in [a,b]$, такое что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ или $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Теорема 5. (Вторая теорема о среднем). Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и, кроме того, $g(x) \ge 0$, то

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx, \tag{4}$$

где $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Так как $\forall x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и $g(x) \ge 0$, то $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Тогда по свойству монотонности

$$\int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$$

или

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx .$$

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует число $\xi \in [a,b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по свойству функций, непрерывных на отрезке, существуют $\alpha, \beta \in [a,b]$, такие что $f(\alpha) = m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $f(\beta) = M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, тогда справедлива вторая теорема о среднем. Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Если $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, то разделим неравенство (9.4) на $\int_a^b g(x)dx$, получим $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$. Снова по свойству функций, непрерывных на отрезке, существует $\xi \in [a,b]$, такое что $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ или $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

3. Интеграл как функция верхнего предела

Определим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, где $x \in [a,b]$. Эта функция называется *функцией верхнего предела*.

Перечислим свойства функции $F(x)$.

1. Функция верхнего предела $F(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, причем $F(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0$, $F(b)=\int\limits_a^b f(t)dt$.

2. Функция верхнего предела $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

В самом деле, найдем приращение функции верхнего предела

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=$$

$$=\int\limits_x^a f(t)dt+\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Так как функция $f(t)$ интегрируема на $[a,b]$, то $f(t)$ ограничена на этом отрезке, т.е. $\exists M \ \ \forall t\in[a,b] \ \ |f(t)|\le M$. Тогда

$$|\Delta F|=\left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\le\int\limits_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\le\int\limits_x^{x+\Delta x} Mdt=$$

$$=M\int\limits_x^{x+\Delta x}dt=M\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=M\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_i\right)=$$

$$=M\left(x+\Delta x-x\right)=M\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F=0$, а это означает, что функция $F(x)$ непрерывна.

3. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция верхнего предела $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, причем $F'(x)=f(x)$, т.е. $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

В самом деле, покажем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=f(x)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta F}{\Delta x}-f(x)\right)=0$, где $x\in[a,b]$. Для этого оценим разность $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}-f(x)$. Имеем

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt-\frac{1}{\Delta x}f(x)\Delta x\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt-\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(x)dt\right|\le\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\left|f(t)-f(x)\right|dt.$$

При этом мы использовали равенство $\Delta x=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} dt$, которое получается из определения определенного интеграла:

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} dt=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_i\right)=x_n-x_0=(x+\Delta x)-x=\Delta x.$$

Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке $x\in[a,b]$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется δ, такое, что если $|\Delta x|<\delta$, то $|\Delta f(x)|=|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$. Но тогда $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ для любого $t\in[x,x+\Delta x]$. Поэтому

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x)\right|\le\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\varepsilon dt=\frac{1}{\Delta x}\varepsilon\int\limits_{x}^{x+\Delta x} dt=\frac{1}{\Delta x}\varepsilon\Delta x=\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x)\right)=0$ или $F'(x)=f(x)$.

4. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $\Phi(x)$ – некоторая (любая) ее первообразная, тогда справедлива *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (5)$$

Это теорема является центральной теоремой интегрального исчисления. Первообразная $\Phi(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$: $\int f(x)dx = \Phi(x) + C$. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла, или первообразной, и простой подстановке пределов интегрирования.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – функция верхнего предела. Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$. В этом случае справедливо равенство $F(x) - \Phi(x) = C$ или $F(x) = \Phi(x) + C$, где $C = const$. Тогда

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C. \qquad (6)$$

Подставим в равенство (6) $x = a$. Получим $\int\limits_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C$ или $\Phi(a) + C = 0$. Отсюда находим $C = -\Phi(a)$. Тогда равенство (6) примет вид

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Подставим теперь в последнее равенство $x = b$. Получим формулу (5).

Замечание. Отметим еще раз, что формула Ньютона-Лейбница применима только в том случае, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Например, при вычислении интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ формулу (1) применять нельзя, так как функция $f(x) = \frac{1}{x}$ разрывна в точке $x = 0 \in [-1,1]$.

5. Методы вычисления определенного интеграла

Методы вычисления определенного интеграла аналогичны методам вычисления неопределенного интеграла.

1. Замена переменной интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$ и $\forall t\in[\alpha,\beta]\ \ a\le\varphi(t)\le b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

2. Формула интегрирования по частям.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл $I=\int\limits_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Положим $\ln x=t$, тогда $\frac{dx}{x}=dt$. Если $x=1$, то $t=0$. Если $x=e$, то $t=1$. Следовательно,

$$I=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u=x\qquad\Rightarrow\quad du=dx,$$

$$dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\quad\Rightarrow\quad v=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда находим

$$I = \frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos(\pi/3)} - \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln tg\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \ln tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \ln tg\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

6. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если известна первообразная функции $f(x)$, то можно применить формулу Ньютона-Лейбница. Но мы знаем, что не всегда первообразная существует и тогда возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

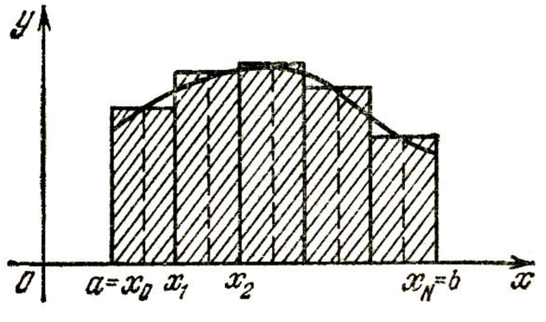
1. Формула прямоугольников.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей. См. рис. 2. Тогда $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. В качестве ξ_i возьмем точки $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда по определению определенного интеграла получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

Это и есть *квадратурная формула прямоугольников*.



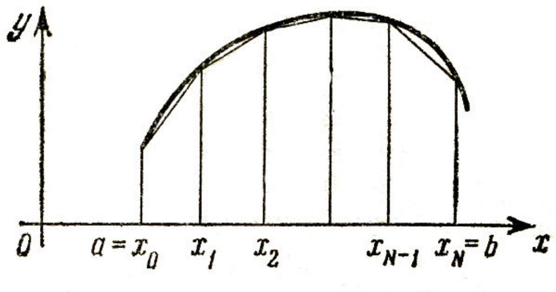


Рисунок 2 Рисунок 3

2. Формула трапеций.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей. Тогда интеграл приближенно будет равен сумме площадей трапеций, вписанных в криволинейную трапецию. См. рис. 3. Имеем $S_i = \Delta x \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n =$$

$$= \Delta x\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) =$$

$$= \Delta x\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Последняя формула называется *квадратурной формулой трапеций*.

Замечание. Формулы прямоугольников и трапеций точны для многочленов не выше первой степени, т.е. для линейных функций $y = Ax + B$. В этом смысле формула трапеций не имеет никакого преимущества перед формулой прямоугольников.

3. Формула парабол. Формула Симпсона.

Рассмотрим на плоскости три точки $A(-\Delta x, y_0)$, $B(0, y_1)$, $C(\Delta x, y_2)$. Известно, что через три точки на плоскости можно провести единственную параболу $y = ax^2 + bx + c$. Поскольку точки A, B и C лежат на параболе, то должны выполняться равенства

$$y_0 = a(\Delta x)^2 - b\Delta x + c, \qquad y_1 = c, \qquad y_2 = a(\Delta x)^2 + b\Delta x + c.$$

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой на отрезке $[-\Delta x, \Delta x]$.

$$S = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \left(ax^2 + bx + c \right) dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right) \Bigg|_{-\Delta x}^{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3} \left(2a\left(\Delta x\right)^2 + 6c \right) = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right).$$

Полученная формула $S = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right)$ называется *формулой Симпсона*.

Из этой формулы, перейдя от отрезка $[-\Delta x, \Delta x]$ к отрезку $[a, b]$, получается *квадратурная формула парабол*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2} \right) + f(b) \right).$$

Отметим, что эта формула точна для многочленов третьей степени.

Разделим теперь отрезок $[a, b]$ на четное число равных частей. Тогда $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$, а интеграл можно приближенно вычислить следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n .$$

Из формулы Симпсона имеем:

$$S_1 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right),$$

$$S_2 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4 \right),$$

....

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n} \right).$$

Тогда получаем *обобщенную квадратурную формулу парабол*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_{2n} \right).$$