ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижения порядка

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.*

Некоторые уравнения n-го порядка интегрируется путем сведения к уравнению более низкого порядка. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Уравнение, содержащее независимую переменную и производную порядка n*:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Общее решение его находится путем последовательного n-кратного интегрирования: $y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_{n-1}x + c_n$.

2. *Уравнение, не содержащее искомой функции*:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \quad (1 \le k < n),$$

то есть уравнение не содержит функцию y и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно. Делаем замену $y^{(k)} = z(x)$, которая позволяет понизить порядок данного уравнения на k единиц. При этом получится уравнение $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$. Проинтегрировав его, найдем общее решение $z = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$, отсюда, $y^{(k)} = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$. Путем k-кратного интегрирования находим общее решение исходного уравнения.

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт, После: 0 пт

3. *Уравнение, не содержащее независимой переменной*:

$$F(y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Можно понизить порядок данного уравнения на единицу с помощью подстановки $y' = p(y)$. При этом y принимается за переменную. Тогда

$y'' = \frac{dp}{dy}p$, $y''' = \left(\frac{d^2 p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)p$ и т. д. Подставив эти производные в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка на неизвестную функцию $p(y)$. Пусть решением полученного уравнения будет $p = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, следовательно, $y' = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$. Проинтегрировав последнее уравнение, найдем $x + c_n = \int \frac{dy}{q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})}$.

4. *Уравнение в точных производных*:

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0,$$

то есть левая часть данного уравнения может быть представлена в виде $\frac{d}{dx}R(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}) = 0$. Проинтегрировав его, мы получим новое уравнение $(n-1)$-го порядка: $R(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}) = c_1$.

5. *Уравнение, однородное относительно функции* y *и ее производных*:

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0,$$

то есть справедливо равенство $F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', ..., y^{(n)})$, $t \neq 0$.

Порядок уравнения в этом случае можно понизить на единицу с помощью подстановки $y' = yz$, тогда $y'' = y(z^2 + z')$, $y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$, …, $y^{(n)} = yr(z, z', ..., z^{(n-1)})$. Здесь $z(x)$– новая неизвестная функция. Подставив все производные в исходное уравнение, получим уравнение $(n-1)$-го порядка на функцию $z(x)$. Решив его, найдем $z = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, вернувшись к замене $z = y'/y$, получим $dy/y = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-1})dx$, отсюда общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = c_n e^{\int q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-1})dx}$.

Примеры решения задач

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = x + \cos x.$$

Решение. Это уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. После первого интегрирования получим $y' = \int (x + \cos x)dx + c_1 = x^2/2 + \sin x + c_1$. Проинтегрировав второй раз, получим общее решение $y = x^3/6 - \cos x + c_1 x + c_2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''' = 2, \; y''(1) = 2, \; y'(1) = 3, \; y(1) = 7/3.$$

Решение. Проинтегрировав уравнение $y''' = 2$, получим

$$y'' = 2x + c_1, \; y' = x^2 + c_1 x + c_2,$$

отсюда общее решение

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

С учетом начального условия $y''(1) = 2$ имеем $2 = 2 + c_1$, то есть $c_1 = 0$. Использование условия $y'(1) = 3$ дает $3 = 1 + c_2$, отсюда $c_2 = 2$. И, наконец, с помощью третьего начального условия $y(1) = 7/3$ найдем $c_3 = 0$. Следовательно, частное решение таково: $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x$.

3. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''^2 - 3y'' + 2 = 0.$$

Решение. Решив это уравнение относительно y'', как обычное квадратное уравнение, найдем $y'' = 1$ и $y'' = 2$. Решив их, получим

$$y=\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2,\ y=x^2+c_1x+c_2.$$

Тогда общее решение можно записать в виде общего интеграла

$$(y-\frac{x^2}{2}-c_1x-c_2)(y-x^2-c_1x-c_2)=0.$$

4. Найти решение дифференциального уравнения

$$x-\sin y''+2y''=0.$$

Решение. Это уравнение, неразрешимое относительно y''. Сделав замену $y''=t$, получим

$$x=\sin t-2t,$$

отсюда $dx=\cos t dt-2dt$. Так как $y''=\frac{dy'}{dx}=t$, то $dy'=tdx$, $dy'=t(\cos t-2)dt$. Тогда $y'=\int t(\cos t-2)dt+c_1$. Проинтегрировав полученный интеграл, найдем

$$y'=t\sin t+\cos t-t^2+c_1.$$

Так как $y'=dy/dx$, то $dy=y'dx=(t\sin t+\cos t-t^2+c_1)(\cos t-2)dt$. Отсюда

$$y=\int(t\sin t+\cos t-t^2+c_1)(\cos t-2)dt+c_2.$$

Раскрыв скобки и проинтегрировав все интегралы, получим

$$y=\frac{3}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t+(c_1-2-t^2)\sin t+(-2c_1+\frac{1}{2})t+\frac{2}{3}t^3+c_2.$$

Последнее равенство вместе с равенством $x=\sin t-2t$ дает параметрическое решение заданного уравнения.

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$xy'' - y' = 0.$$

Решение. Сделав замену $y' = z(x)$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$xz' - z = 0,$$

отсюда имеем $x\frac{dz}{dx} = z$, или $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|c_1|, \text{ или } z = xc_1,$$

следовательно, $y' = xc_1$, или $y = \int xc_1 dx + c_2$. Проинтегрировав, получим общее решение заданного уравнения: $y = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2$.

6. Найти решение дифференциального уравнения

$$y^3 y'' = 1.$$

Решение. После подстановки $y' = p(y)$ и $y'' = \frac{dp}{dy} p$ получим $y^3 \frac{dp}{dy} p = 1$, разделив переменные, найдем $\int p dp = \int \frac{dy}{y^3} + c_1$. Вычислив интегралы, после преобразований имеем $p = \pm\sqrt{\frac{c_1 y^2 - 1}{y^2}}$, или $y' = \pm\frac{\sqrt{c_1 y^2 - 1}}{y}$. Это уравнение с разделяющимися переменными, которое интегрируется следующим образом: $\pm\int \frac{y dy}{\sqrt{c_1 y^2 - 1}} = \int dx + c_2$,

$\pm\dfrac{1}{2c_1}\int\dfrac{d(c_1y^2-1)}{\sqrt{c_1y^2-1}}=x+c_2$, в итоге $\pm\dfrac{1}{c_1}\sqrt{c_1y^2-1}=x+c_2$ или, возведя обе части в квадрат, получим общее решение в виде общего интеграла: $c_1y^2-1=(c_1x+c_2)^2$.

7. Найти решение дифференциального уравнения

$$yy''=y'^2.$$

Решение. Это уравнение в точных производных. Поделим обе части на функцию yy': $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{y'}{y}$, отсюда $(\ln y')'=(\ln y)'$. Проинтегрировав, находим $\ln y'=\ln y+\ln c_1$, или $y'=yc_1$. Интегрируя еще раз, получим общее решение

$$y=c_2e^{c_1x}.$$

8. Найти решение дифференциального уравнения

$$x^2yy''=(y-xy')^2.$$

Решение. Это уравнение однородное относительно функции y и ее производных. Сделав замену $y'=yz$, после несложных преобразований найдем уравнение первого порядка на функцию $z(x)$:

$$x^2z'=1-2xz\text{, или } z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}.$$

Это линейное уравнение, решив его методом вариации постоянной или методом подстановки, получим $z=\dfrac{1}{x^2}(x+c_1)$. Вернувшись к функции y, получим уравнение: $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{x+c_1}{x^2}dx$, которое после интегрирования дает общее решение исходного уравнения $y=c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$.