ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

1. Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где R – рациональная функция, a, b, c, d – действительные числа, $\alpha, \beta, ..., \delta, \gamma$ – натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной дроби путём подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, ..., \frac{\delta}{\gamma}$.

2. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью следующих *тригонометрических подстановок*: $x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла, $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла, $x = \frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

3. Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ можно найти, если выделить под корнем полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t$. При этом интегралы приводятся к рассмотренным в п. 2.

4. Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, где a,b – действительные, а m,n,p – рациональные числа выражаются через элементарные функции только в трёх случаях:

1) p – целое число; данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число; интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число; подстановка $a+bx^n=x^n\cdot t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Примеры решения задач

1. Найти интегралы: а) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\dfrac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; в) $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{dx}{x}$.

Решение.

Это интегралы типа 1.

а) В этом случае $a=d=1,\ b=c=0$. Сделаем подстановку $x=t^6$ (6– наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\begin{bmatrix} x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt\end{bmatrix}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=$$

$$=6\left[\int\frac{t^3+1}{t+1}dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=6\left[\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\ln|t+1|\right]=$$

$$=6\left[\int(t^2-t+1)dt-\ln|t+1|\right]=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$$

б) В этом случае $a=b=d=1,\ c=0$. Сделаем подстановку $1+x=t^6$ (6– наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Тогда

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\left[\begin{matrix}1+x=t^6\Rightarrow x=t^6-1\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right]=\int\frac{t^6-1+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt=$$

$$=6\int(t^9+t^6-t^3)dt=6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=6t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C=$$

$$=6\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

в) В этом случае $a=-1, b=c=d=1$. Сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2$.

Отсюда $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и, значит,

$$dx=\frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}dt=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt\,.$$

Тогда

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\left[\frac{1-x}{1+x}=t^2\right]=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2}=4\int\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\operatorname{arctg}t\right)+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\,.$$

2. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$.

Решение.

Это интеграл типа 2. Применим подстановку $x=2\sin t$. Тогда

$$\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\left[\begin{matrix}x=2\sin t\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{2}\\ dx=2\cos t\,dt\end{matrix}\right]=\int\frac{(4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}{2^6\sin^6 t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^4 t\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^4 t\cdot d(\operatorname{ctg}t)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^5 t}{5}+C=$$

$$=-\frac{1}{20}\cdot\operatorname{ctg}^5(\arcsin\frac{x}{2})+C=C-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}\,.$$

Здесь в последнем равенстве использована формула:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \left[\sin t = \frac{x}{2}\right] = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx$.

Решение.

Это интеграл типа 3. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$9+6x-3x^2 = -3(x^2-2x-3) = -3((x-1)^2-4) = 3(4-(x-1)^2)$

и сделаем подстановку $t = x-1$. Тогда

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3x-5}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = \begin{bmatrix} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3(t+1)-5}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \sqrt{3}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-t^2}}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

4. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение.

Представим данный интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot (1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} dx$.

Теперь видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином вида 4, при этом $m=\frac{1}{3}, n=\frac{2}{3}, p=\frac{1}{3}$. Так как в данном случае $\frac{m+1}{n}=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}}=2-$ целое число, то следует применить подстановку 2), т. е. $1+3x^{\frac{2}{3}}=t^3$. Следовательно, $x=\frac{1}{3\sqrt{3}}(t^3-1)^{\frac{3}{2}}$, и, значит, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^3-1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^2 dt$. Таким образом,

$$\int x^{\frac{1}{3}} \cdot (1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} dx = \int \frac{\sqrt{t^3-1}}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^3-1} \cdot t^2 dt = \frac{1}{2}\int (t^3-1)t^3 dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int (t^6-t^3)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{t^7}{14}-\frac{t^4}{8}+C=$$

$$=\frac{1}{14}\sqrt[3]{(1+3\cdot\sqrt[3]{x^2})^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+3\cdot\sqrt[3]{x^2})^4}+C.$$