ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Определённый интеграл

Основные свойства определённого интеграла:

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, где C – постоянная.

6. *Оценка определённого интеграла*: если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Правила вычисления определённых интегралов:

1. *Формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

2. *Интегрирование по частям*:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$.

3. *Замена переменной*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на $[a,b]$, $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

4. Если $f(x)$ – нечётная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Если $f(x)$ – чётная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Примеры решения задач

1. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ имеет первообразную $F(x) = \operatorname{tg} x$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Выделяя полный квадрат в знаменателе под корнем, находим:

$$\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\int_{-4}^{-2}\frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2}=$$

$$=\arcsin 0-\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)=\arcsin\frac{2}{3}.$$

2. Оценить интеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Решение.

Поскольку $0\le\cos^2 x\le 1$, имеем:

$$\frac{1}{8}\le\frac{1}{5+3\cos^2 x}\le\frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{16}\le\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+3\cos^2 x}\le\frac{\pi}{10}.$$

3. Вычислить интегралы: а) $\int_1^9\frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$; б) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$; в) $\int_2^3 x(3-x)^7\,dx$**.**

Решение.

Вычислим эти интегралы с помощью замены переменной.

а) Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9

$t=\sqrt{x}$	1	3

Тогда

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}=\begin{bmatrix} t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{bmatrix}=\int_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t}=\int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt=\int_1^3\left(1-\frac{5}{2t+5}\right)dt=$$

$$=t\Big|_1^3-5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3=3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7)=2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

б) $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}=\begin{bmatrix} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\,\mathrm{arctg}\,t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}=\int_0^1\frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int_0^1\frac{2dt}{t^2+5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

в) $$\int_2^3 x(3-x)^7\,dx=\begin{bmatrix} t=3-x\Rightarrow x=3-t \\ dx=-dt \end{bmatrix}=\int_1^0(3-t)t^7(-dt)=\int_1^0(t^8-3t^7)dt=$$

$$=\left(\frac{t^9}{9}-3\frac{t^8}{8}\right)\Bigg|_1^0=-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{19}{72}.$$

4. Вычислить интегралы: а) $\int_1^9 (x+1)\ln x\,dx$; б) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Решение.

Эти интегралы вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям.

а) $\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x+1 \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}+x \end{array}\right] = \left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e -$

$-\int\limits_1^e \left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\dfrac{dx}{x} = \dfrac{e^2}{2}+e-\left(\dfrac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e = \dfrac{e^2}{2}+e-\dfrac{e^2}{4}-e+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{e^2+5}{4}$

б) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg} x \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array}\right] = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x\,dx}{1+x^2} =$

$= \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{\pi-\ln 4}{4}.$

5. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx$.

Решение.

Это интегралы в симметричных пределах. Значит, нужно проверить подынтегральные функции на предмет чётности-нечётности.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ – нечётная, значит,

$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx=0.$

б) В данном случае подынтегральная функция не является ни чётной, ни нечётной, но её можно представить в виде суммы таких функций:

$$\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}=\frac{x^5+x^3}{x^3+x}+\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx+\int\limits_{-2}^{2}\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3(x^2+1)}{x(x^2+1)}dx+0=2\int\limits_{0}^{2}x^2dx=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{16}{3}.$$