ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида

Напомним, что *линейное неоднородное уравнение* n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x),$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ – вещественные постоянные числа.

Общим решением такого уравнения является сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения: $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$. Иногда частное решение удается найти в зависимости от правой части неоднородного уравнения, то есть от вида функции $f(x)$. Рассмотрим разные случаи.

1) Если $f(x) = P(x)$ – полином k-ой степени, и число нуль не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение ищем в виде $\bar{y} = Q(x)$, где $Q(x)$ – полином k-ой степени, но с неопределенными коэффициентами. Для нахождения неизвестных коэффициентов надо воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Если нуль является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение ищем в виде $\bar{y} = x^s Q(x)$.

2) Если $f(x) = e^{ax} P(x)$ и число a не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение ищем в виде $\bar{y} = e^{ax} Q(x)$. Здесь полином $Q(x)$ с неопределенными коэффициентами, причем той же степени, что и полином $P(x)$. Если a является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение ищем в виде $\bar{y} = x^s e^{ax} Q(x)$.

3) Если $f(x) = e^{ax}(A(x)\cos bx + B(x)\sin bx)$, где $A(x), B(x)$ – полиномы, их степени могут не совпадать, и комплексное число $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $\bar{y} = e^{ax}(C(x)\cos bx + D(x)\sin bx)$, здесь степень полиномов $C(x), D(x)$ с неопределенными коэффициентами совпадает с наибольшей степенью полиномов $A(x), B(x)$. Если комплексное число $a + ib$ является корнем характеристического уравнения кратности s, то частное решение ищем в виде $\bar{y} = x^s e^{ax}(C(x)\cos bx + D(x)\sin bx)$.

Примеры решения задач

1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 5.$$

Решение. Составим однородное уравнение $y'' - 7y' + 12y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 12 = 0$ имеет корни $k_1 = 3, k_2 = 4$, отсюда, получим общее решение однородного уравнения: $y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$.

Теперь рассмотрим правую часть заданного неоднородного уравнения. В правой части стоит число *5*, которое надо рассматривать как полином нулевой степени. Так как число нуль не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\bar{y} = A$, где A является произвольным полиномом нулевой степени, то есть произвольной постоянной. Для ее нахождения, надо $\bar{y} = A$ подставить в исходное неоднородное уравнение: $(A)'' - 7(A)' + 12A = 5$. Отсюда видно, что $12A = 5$, или $A = 5/12$, следовательно, $\bar{y} = 5/12$.

Итак, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + 5/12.$$

2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' = 7.$$

Решение. Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 5y' = 0$ характеристическое уравнение $k^2 - 5k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_2 = 5$, отсюда, получим общее решение однородного уравнения: $y_0 = c_1 + c_2 e^{5x}$.

Правая часть неоднородного уравнения представляет собой полином нулевой степени, при этом число нуль является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y} = Ax$. Подставляем в исходное неоднородное уравнение: $(Ax)'' - 5(Ax)' = 7$, $-5A = 7$. Отсюда, $A = -7/5$, тогда $\bar{y} = -\frac{7}{5}x$.

Таким образом, общее решение: $y = c_1 + c_2 e^{5x} - \frac{7}{5}x$.

3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} - 3y'' = 9x^2.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 - 3k^2 = 0$ однородного уравнения $y^{(4)} - 3y'' = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0, k_3 = \sqrt{3}, k_4 = -\sqrt{3}$, следовательно, $y_0 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\sqrt{3}x} + c_4 e^{-\sqrt{3}x}$.

В правой части неоднородного уравнения стоит полином второго порядка. Число нуль является корнем кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y} = x^2(Ax^2 + Bx + C)$, где в скобках стоит полином второй степени с неопределенными коэффициентами. Для их определения надо $\bar{y}$ подставить в исходное уравнение. Предварительно вычислим производные:

$$\bar{y}' = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$\bar{y}'' = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx)' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$\bar{y}''' = (12Ax^2 + 6Bx + 2C)' = 24Ax + 6B,$$

$$\bar{y}^{(4)} = (24Ax + 6B)' = 24A.$$

Подставив производные в неоднородное уравнение, найдем

$$24A - 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 9x^2, \quad -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A = 9x^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим систему алгебраических уравнений для определения чисел A, B, C:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -36A \quad =9, \\ x & -18B=0, \\ 1 & -6C+24A=0, \end{array}$$

откуда $A=-1/4, B=0, C=-1$. Тогда, получим частное решение в виде

$$\bar{y}=x^2(-\frac{1}{4}x^2-1)=-\frac{1}{4}x^4-x^2.$$

Общим решением заданного уравнения является функция

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{\sqrt{3}x}+c_4e^{-\sqrt{3}x}-\frac{1}{4}x^4-x^2.$$

4. Найти общее решение уравнения

$$y''-y'=e^x+e^{2x}+x.$$

Решение. Составим однородное уравнение $y''-y'=0$. Его характеристическое уравнение $k^2-k=0$ имеет корни $k_1=0, k_2=1$. Следовательно, получим общее решение однородного уравнения в виде $y=c_1+c_2e^x$.

Правая часть заданного уравнения состоит из суммы трех функций $e^x+e^{2x}+x$. Поэтому вначале мы найдем частные решения уравнений:

$$1)\ y''-y'=e^x, \quad 2)\ y''-y'=e^{2x}, \quad 3)\ y''-y'=x.$$

Первое уравнение описано в пункте 2). Сравнив $f(x)=e^{ax}P(x)$ с нашей правой частью $f(x)=e^x$, найдем $a=1$ и $P(x)=1-$полином нулевой степени. Число $a=1$ совпадает с одним из корней $k_2=1$, отсюда частное решение первого уравнения ищем в виде $\bar{y}_1=Qxe^x$, где $Q-$полином нулевой степени, то есть число, которое надо определить. Для этого вычислим производные $\bar{y}_1' = Qe^x + Qxe^x$, $\bar{y}_1'' = 2Qe^x + Qxe^x$ и подставим их в первое уравнение

$$2Qe^x + Qxe^x - Qe^x - Qxe^x = e^x, \text{ или } Qe^x = e^x,$$

отсюда $Q = 1$, следовательно, $\bar{y}_1 = xe^x$.

Второе уравнение с правой частью $f(x) = e^{2x}$ описано в пункте 2). Число $a = 2$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому частное решение второго уравнения ищем в виде $\bar{y}_2 = Qe^{2x}$. Вычислив производные и подставив их во второе уравнение, найдем $Q = 1/2$, тогда $\bar{y}_2 = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Третье уравнение описано в пункте 1). Сравнив $f(x) = P(x)$ с нашей правой частью $f(x) = x$, найдем $P(x) = x -$ полином первой степени. Также нуль является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y}_3 = x(Q_1 x + Q_2)$, где $Q(x) = Q_1 x + Q_2 -$ полином первой степени с неопределенными коэффициентами Q_1, Q_2. Вычислив производные $\bar{y}_3' = 2xQ_1 + Q_2$, $\bar{y}_3'' = 2Q_1$ и подставив их в третье уравнение, получим

$$-2xQ_1 - Q_2 + 2Q_1 = x.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства, найдем систему алгебраических уравнений

$$\begin{array}{r|l} x & \qquad -2Q_1 = 1, \\ 1 & -Q_2 + 2Q_1 = 0, \end{array}$$

решением которой является $Q_1 = -\frac{1}{2}$, $Q_2 - 1$, отсюда $\bar{y}_3 = -x(\frac{1}{2}x + 1)$.

Итак, частным решением исходного уравнения будет

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x(\frac{1}{2}x + 1),$$

а общим решением $y = c_1 + c_2 e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x(\frac{1}{2}x + 1)$.

5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = (x+2)e^{3x}.$$

Решение. Запишем однородное уравнение $y'' - 2y' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = e^x (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x).$$

Правая часть заданного неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{ax} P(x)$, где $a = 3, P(x) = x + 2$. Заметим, что число a не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = e^{3x}(Ax + B).$$

Подставив $\bar{y}$ в неоднородное уравнение, найдем

$$e^{3x}(7Ax + 4A + 7B) = e^{3x}(x+2).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$7A = 1, \quad 4A + 7B = 2,$$

отсюда $A = 1/7, B = 10/49$. Тогда $\bar{y} = e^{3x}(x/7 + 10/49)$, следовательно, общее решение исходного уравнения запишется в виде

$$y_0 = e^x (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x) + e^{3x}(x/7 + 10/49).$$

6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 5\sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2+1=0$ имеет корни $k=\pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения $y_0(x)=c_1\cos x + c_2\sin x$.

Правая часть уравнения имеет вид $f(x)=e^{ax}(A(x)\cos bx + B(x)\sin bx)$, где $a=0, b=2, A(x)=0, B(x)=5$. Число $a+ib=2i$ не является корнем характеристического уравнения и полиномы $A(x)=0, B(x)=5$ являются полиномами нулевой степени. Поэтому частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Подставив $\bar{y}$ в заданное неоднородное уравнение, найдем

$$(-4A + A)\cos 2x + (B - 4B)\sin 2x = 5\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства при $\cos 2x, \sin 2x$, получим

$$-4A + A = 0, \quad B - 4B = 5.$$

Значит, $A=0, B=-5/3$. Поэтому $\bar{y} = -\frac{5}{3}\sin 2x$, следовательно, общее решение исходного уравнения: $y(x)=c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{5}{3}\sin 2x$.

7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x\sin x.$$

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2+1=0$ имеет корни $k=\pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения $y_0(x)=c_1\cos x + c_2\sin x$.

Правая часть заданного уравнения представляет собой функцию вида $f(x)=e^{ax}(A(x)\cos bx + B(x)\sin bx)$, где $a=0, b=1, A(x)=0, B(x)=x$. Видно, что число $k=\pm i$ совпадает с числом $a \pm ib = 0 \pm 1i = \pm i$, то есть $a \pm ib$

является корнем характеристического уравнения кратности 1. Полином $B(x)$ есть полином первой степени. Таким образом, ищем частное решение в виде

$$\bar{y} = x\big((C_1 x + C_2)\cos x + (D_1 x + D_2)\sin x\big),$$

где $C_1, C_2, D_1, D_2 -$ неопределенные коэффициенты. Дифференцируем частное решение два раза и результат подставляем в заданное неоднородное уравнение. В полученном равенстве, приравняв коэффициенты в левой и правой частях при $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2C_1 + 2D_2 = 0, \\ 4D_1 = 0, \\ -2C_2 + 2D_1 = 0, \\ -4C_1 = 1, \end{cases}$$

решениями которых являются $C_1 = -\frac{1}{4}, C_2 = 0, D_1 = 0, D_2 = \frac{1}{4}$, отсюда

$$\bar{y} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Тогда общим решением заданного уравнения будет

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$