

**Задачи для самостоятельного решения по теме
практического занятия 10**

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава IX, § 44-45 и [2]: глава 11, § 4 (см. прилагаемый список литературы).

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$:

а) $z = x^2 y^3 u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$. **Ответ:** $t^7 (8 \sin t + t \cos t)$

б) $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$. **Ответ:** $y x^{y-1} \frac{1}{t} + x^y \ln x \cos t$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$:

а) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 3x + 1$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x(3x+1)}{(x^2+3x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}$.

б) $z = x^2 y$, где $y = \cos x$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos x$, $\frac{dz}{dx} = x(2 \cos x - x \sin x)$.

3. Для данных $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ и dz :

а) $z = x^3 + y^3$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Ответ: $dz = 3u^2 \left(v^3 + \frac{1}{v^3} \right) du + u^3 \left(3v^2 - \frac{3}{v^4} \right) dv$.

б) $z = \cos xy$, где $x = ue^v$, $y = v \ln u$.

Ответ: $dz = - \left(ye^v + x \frac{v}{u} \right) \sin xy du - (ye^v + x \ln u) \sin xy dv$.

в) $z = \sqrt{x+y}$, где $x = u \operatorname{tg} v$, $y = u \operatorname{ctg} v$

Ответ: $dz = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \left[\frac{2du}{\sin 2v} + \left(\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\sin^2 v} \right) u dv \right].$

4. Найти производные $y'(x)$ неявных функций, заданных уравнениями:

а) $xe^{2y} - y \ln x = 8.$ **Ответ:** $y' = \frac{e^{2y} - \frac{y}{x}}{\ln x - 2xe^{2y}}.$

б) $\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$ **Ответ:** $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

5. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявных функций $z = z(x, y)$,

определяемых следующими уравнениями:

а) $z^3 - 3xyz = R^2.$ **Ответ:** $dz = \frac{yz dx + xz dy}{z^2 - xy}.$

б) $x + y + z = e^z.$ **Ответ:** $dz = \frac{dx + dy}{x + y + z - 1}.$

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

а) $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1:1:3).$

Ответ: $2x + 2y - z = 1, \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$

б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в точке $M(2:2:3).$

Ответ: $2x + 2y - 3z + 1 = 0, \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$

в) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1:0:0).$

Ответ: $z - 2x + 2 = 0, \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}.$

7. Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, параллельных плоскости $x + 4y + 6z = 0.$

Ответ: $x + 4y + 6z \pm 21 = 0.$