Лекция 9. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл 1-го рода

1. Определение криволинейного интеграла 1-го рода, свойства

Пусть AB – дуга гладкой кривой L и пусть задана функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке M дуги AB. Разобьем произвольно дугу на n частей точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$. Обозначим Δl_i - длины частичных дуг $A_{i-1}A_i, (i = 1, 2, ..., n)$ и выберем на каждой из них по одной произвольной точке $P_1, P_2, ..., P_n$. Вычислим значение функции в этих точках и составим сумму

$$f(P_1)\Delta l_1 + f(P_2)\Delta l_2 + ... + f(P_n)\Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(M)$ по дуге AB. Очевидно, что данная сумма зависит от способа разбиения дуги AB и от способа выбора точек P_i, поэтому можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. Однако, при стремлении числа n к бесконечности и при стремлении наибольшей из длин частичных дуг $\max \Delta l_i$ к нулю, все эти различные интегральные суммы стремятся к одному и тому же числу.

Итак, *если при* $\max \Delta l_i \to 0$ *интегральная сумма* $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$ *имеет определенный конечный предел, не зависящий от способа разбиения дуги AB и от способа выбора точек* $P_i \in A_{i-1}A_i$, *то этот предел называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f(M) по дуге AB* и обозначается $\int_{AB} f(P)dl$.

Из определения следует, что $\int_{AB} f(P)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$.

Отметим, что кривая L может быть задана как на плоскости, так и в пространстве. В первом случае криволинейный интеграл 1-го рода можно записать как $\int_{AB} f(x, y)dl$, а во втором случае как $\int_{AB} f(x, y, z)dl$.

Приведем некоторые физические приложения данного интеграла.

Если функция $f(M)$ является линейной плотностью кривой L, то криволинейный интеграл 1-го рода $\int_{L} f(P)dl$ равен массе этой кривой.

Интегралы $M_x = \int\limits_L yf(P)dl, M_y = \int\limits_L xf(P)dl$ являются статическими моментами кривой L относительно осей Ox и Oy.

Координаты центра тяжести кривой вычисляются по формулам $x_0 = \dfrac{M_y}{m}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{m}$, где m- масса кривой.

Перечислим основные свойства рассматриваемого интеграла.

1) $\int\limits_{AB} dl = l$, где l- длина дуги AB.

2) $\int\limits_{AB} f(P)dl = \int\limits_{BA} f(P)dl$, то есть данный интеграл не зависит от ориентации кривой.

3) $\int\limits_{AB} (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P))dl = c_1 \int\limits_{AB} f_1(P)dl + c_2 \int\limits_{AB} f_2(P)dl$, где $f_1(P), f_2(P)$ - функции, интегрируемые на кривой L, c_1, c_2 - произвольные числа.

4) $\int\limits_{L_1} f(P)dl + \int\limits_{L_2} f(P)dl = \int\limits_{L} f(P)dl$, где $L = L_1 \oplus L_2$.

2. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть кривая L на плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, где $x(t),\ y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, и функция $f(x,y)$ является непрерывной на L, то существует криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$, причем

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (1)$$

Отметим, что если кривая L задана в трехмерном пространстве уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то формула (1) запишется в виде

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \qquad (2)$$

Если кривая L задана уравнением $y = y(x),\ a \le x \le b$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, то из равенства (1) следует

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (3)$$

Действительно, $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \sqrt{1+\frac{y'^2(t)}{x'^2(t)}}x'(t)dt = \sqrt{1+y'^2(x)}dx$. Здесь была использована формула производной функции, заданной параметрически: $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, а также формула первого дифференциала $dx = x'(t)dt$.

Пусть кривая L задана на плоскости полярным уравнением $L: r = r(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда из (1) можно получить

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (4)$$

Действительно, принимая в формуле (1) за параметр t угол φ и с учетом формул $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi$, найдем

$$\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)}d\varphi = \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода

1. Определение криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть AB – дуга гладкой кривой L на плоскости Oxy и пусть заданы две функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывные в каждой точке (x,y) дуги AB. Разобьем произвольно дугу на n частей точками $A_0(x_0,y_0) = A,\ A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2),\ ...,\ A_n(x_n,y_n) = B$. Введем обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ (i = 1,2,...,n)$. Выберем по одной произвольной точке $P_1, P_2, ..., P_n$ на каждой из частичных дуг $A_{i-1}A_i$ и составим две интегральные суммы $\sum_{i=1}^{n} P(P_i)\Delta x_i$, $\sum_{i=1}^{n} Q(P_i)\Delta y_i$. Также как и в случае криволинейного интеграла 1-го рода перейдем к пределу в обеих суммах при $\max \Delta x_i \to 0$ и $\max \Delta y_i \to 0$, соответсвенно. Получим два интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$, которые и называются криволинейными интегралами 2-го рода. При этом можно составить общий *криволинейный интеграл 2-го рода*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Если кривая L задана в пространстве и на этой кривой заданы три непрерывные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, то криволинейный интеграл 2-го рода запишется так

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

Если кривая L замкнутая, то различают два направления обхода. Если область, лежащая внутри кривой остается слева по отношению к движущей по кривой точке, то направление обхода считается положительным, в противном случае отрицательным. В случае замкнутой кривой L криволинейный интеграл 2-го рода в положительном направлении обозначается следующим образом $\oint\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

Рассмотрим свойства данного интеграла. Свойства 3) и 4) для криволинейного интеграла 1-го рода справедливы и для интеграла 2-го рода, а вот свойство 2) нет. Из определения криволинейного интеграла 2-го рода следует, что он зависит от ориентации кривой: $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

Пусть $\overline{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - единичный касательный вектор к положительно ориентированной кривой L в точке $M(x,y,z)$, где α,β,γ - это углы между вектором $\overline{n}$ в точке $M(x,y,z)$ и осями Ox, Oy и Oz, соответственно. Тогда

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{L} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dl.$$

Последнее равенство дает связь между криволинейными интегралами 1-го рода и 2-го рода. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ рассматривать как координаты некоторого векторного поля $\overline{a} = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$, то можно записать

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{L} (\overline{a}\overline{n})dl .$$

Если кривая L замкнутая, то интеграл $\oint\limits_{L} (\overline{a}\overline{n})dl$ называется *циркуляцией* векторного поля $\overline{a}$ по замкнутому контуру L.

Одним из физических приложений криволинейного интеграла 2-го рода является работа A силы $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ при перемещении материальной точки единичной массы из точки A в точку B вдоль дуги AB:

$$A = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,.$$

2. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть кривая L на плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, где $x(t),\ y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ являются непрерывными на L, то существует криволинейный интеграл 2-го рода, причем

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)]dt\,. \tag{5}$$

Если кривая L задана уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \alpha \le t \le \beta$, то формула (15.5) перепишется как

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))'z(t)]dt\,. \tag{6}$$

Если кривая L задана уравнением $y = y(x),\ a \le x \le b$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)]dx\,. \tag{7}$$

<u>Формула Грина</u>

Рассмотрим область Ω, изображенную на рис. 1. Данная область ограниченна сверху и снизу функциями $y = \psi(x),\ y = \varphi(x)$, соответственно, а слева и справа прямыми $x = a,\ x = b$. Назовем такую область *элементарной*. Пусть в этой замкнутой области заданы функции $P(x,y), Q(x,y)$, непрерывные вместе со своими частными производными. Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$ используя метод сведения двойного интеграла к повторному и формулу Ньютона-Лейбница. Найдем

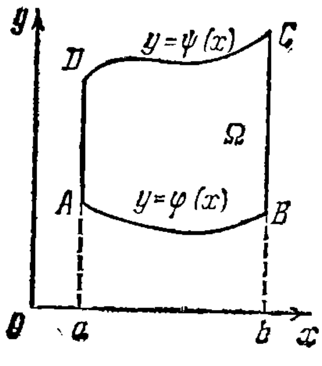

Рис. 15.1.

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx=\int_a^b\big(P(x,\psi(x))-P(x,\varphi(x))\big)dx=$$

$$=\int_a^b P(x,\psi(x))dx-\int_a^b P(x,\varphi(x))dx=\int_{DC}P(x,y)dx-\int_{AB}P(x,y)dx=-\int_{CD}P(x,y)dx-\int_{AB}P(x,y)dx.$$

В силу того, что $\int\limits_{BC}P(x,y)dx=\int\limits_{DA}P(x,y)dx=0$, получим

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int_{AB}P(x,y)dx-\int_{BC}P(x,y)dx-\int_{CD}P(x,y)dx-\int_{DA}P(x,y)dx=-\int_{\gamma^+}P(x,y)dx,$$

где γ^+ - положительно ориентированная граница области Ω.

Аналогично, можно показать, что $\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_{\gamma^+}Q(x,y)dy$. Тогда, справедлива следующая формула

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\gamma^+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Замкнутая область G называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число элементарных областей. При этом никакие две области не имеют общих внутренних точек. Отметим, что элементарной областью считается также область, ограниченная слева и справа функциями $x=\psi(y),\ x=\varphi(y)$, а сверху и снизу прямыми $y=a,\ y=b$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ и их частные производные являются непрерывными в простой области G с положительно ориентированной границей L, тогда справедлива формула Грина

$$\iint_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Формула Грина верна также и для любой ограниченной области с кусочно-гладкой границей.

С помощью этой формулы можно вычислить площадь плоской области G. Действительно, полагая в формуле $P=0, Q=x$, найдем $S=\iint\limits_{G}dxdy=\oint\limits_{L}xdy$. Можно получить другую формулу, если положить $P=-y, Q=0$, то $S=\iint\limits_{G}dxdy=-\oint\limits_{L}ydx$. Таким образом, задавая функции $P(x,y), Q(x,y)$, мы получаем всевозможные формулы для вычисления плошади.

Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования на плоскости

Пусть в плоской области G заданы непрерывные функции $P(x, y), Q(x, y)$. Определим условия, при которых криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по кривой AB не зависит от формы кривой, а зависит только от начала и конца кривой, то есть точек A и B. В этом случае говорят, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования. Кривая AB полностью лежит в области G.

Рассмотрим следующие теоремы.

Теорема 4. Интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда данный интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области G, равен нулю.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $\gamma \subset G$ - любой замкнутый контур. Пусть даны две кривые $(AB)_1$ и $(AB)_2$, соединяющие точки A и B. Очевидно, что кривая $(AB)_1 \cup (BA)_2$ является замкнутой, а значит

$$\int\limits_{(AB)_1 \cup (BA)_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{(AB)_1 \cup (BA)_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(AB)_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int\limits_{(BA)_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{(AB)_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int\limits_{(AB)_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Следовательно, $\int\limits_{(AB)_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(AB)_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то есть интеграл не зависит от пути интегрирования.

Докажем достаточность. Пусть интеграл $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим замкнутый контур $\gamma \subset G$. Произвольно выберем на этом контуре две точки A и B, причем $B \neq A$. Тогда замкнутую кривую $\gamma \subset G$ можно представить как объединение кривых AB и BA. Отсюда,

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int\limits_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

то есть интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Теорема доказана.

Теорема 5. Интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом от некоторой функции $U(x,y)$, определенной в *G,* то есть $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. При этом если $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1)$.

Эта теорема дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования, но на практике эти условия проверить трудно. Для этого рассмотрим более простой способ, но он годится только для односвязных областей. Напомним, что плоская область *G* называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости полностью лежит в области *G*. Например, односвязными областями являются круги, прямоугольники, а неодносвязными – кольца, то есть области с "дырами".

Теорема 6. Если функции $P(x,y), Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в плоской области *G,* то для того чтобы интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования $AB \subset G$, необходимо, а если область *G* односвязная, то и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках *G.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, тогда по теореме 5. существует функция $U(x,y)$ и $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Отсюда следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Продифференцировав первое равенство по *y*, а второе по *x*, получим $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Докажем достаточность. Пусть область *G* односвязная и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Пусть γ – замкнутый контур, лежащий внутри области *G*. Обозначим через *D* – область, ограниченную кривой γ. По формуле Грина

$$\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

тогда из теоремы 4. следует, что данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Теорема доказана.

Таким образом, чтобы на практике выяснить независимость криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от пути интегирования, надо проверить выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Если это условие выполняется, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1)$, где $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Функцию $U(x,y)$ можно найти из системы уравнений в частных производных $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Также можно воспользоваться формулой

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + c,$$

где (x_0, y_0) - произвольная точка, лежащая в области G, если возможно, то чаще всего берут точку (0, 0).