Лекция 12. Поток векторного поля. Формула Остроградского-Гаусса. Дивергенция и циркуляция векторного поля.

Понятие потока векторного поля

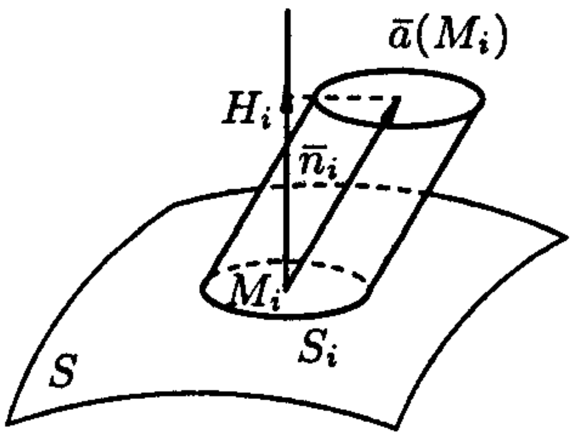

Рис. 4

Пусть векторное поле образовано вектором $\vec{a}(M)$. Для наглядности будем считать $\vec{a}(M)$ вектором скорости некоторого потока жидкости, движущейся стационарно. Представим, что некоторая поверхность S находится в этом потоке и пропускает жидкость. Подсчитаем, какое количество жидкости протекает через поверхность S.

Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть $\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ – единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности S. Разобьем поверхность на элементарные площадки $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_n$. Выберем в каждой площадке точку M_i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ (см. рис. 4) и вычислим значение вектора $\vec{a}(M)$ в каждой точке: $\vec{a}(M_1),\ \vec{a}(M_2),\ \dots,\ \vec{a}(M_n)$.

Будем приближенно считать каждую площадку плоской, а вектор $\vec{a}$ постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки. Тогда за единицу времени через S_i протекает количество жидкости, приближенно равное $\Pi_i \approx h_i \cdot \Delta S_i$, где ΔS_i – площадь i-й площадки, h_i – высота i-го цилиндра с образующей $\vec{a}(M_i)$. Но h_i является проекцией вектора $\vec{a}(M_i)$ на нормаль $\vec{n}_i$: $h_i = \text{Пр}_{\vec{n}_i}\,\vec{a}(M_i) = \vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}_i$, где $\vec{n}_i$ – единичный вектор нормали к поверхности в точке M_i. Следовательно, общее количество жидкости, протекающее через всю поверхность S за единицу времени, найдем, вычислив сумму

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}_i\cdot\Delta S_i .$$

Точное значение искомого количества жидкости получим, взяв предел найденной суммы при неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлении к нулю их размеров (диаметров d_i площадок):

$$\Pi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}_i\cdot\Delta S_i$$

или, согласно определению поверхностного интеграла первого рода

$$\Pi = \iint_S \vec{a}(M)\cdot\vec{n}\,dS .$$

Независимо от физического смысла поля $\vec{a}(M)$ полученный интеграл называют потоком векторного поля.

Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т.е.

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS .$$

Так как $\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, $\vec{a} = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$, то поток вектора $\vec{a}$, можно записать в виде

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода, поток вектора можно записать как

$$\Pi = \iint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy).$$

Отметим, что поток Π вектора $\vec{a}$ есть скалярная величина. *Величина* Π *равна объему жидкости, которая протекает через поверхность S за единицу времени.* В этом состоит *физический смысл потока*.

Особый интерес представляет случай, когда поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем *V*. Тогда поток вектора записывается в виде

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}\vec{n} dS .$$

В этом случае за направление вектора нормали $\vec{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности *S*.

Если векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ есть поле скоростей текущей жидкости, величина потока Π через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области *V* и втекающей в нее за единицу времени.

При этом если $\Pi > 0$, то из области *V* вытекает больше жидкости, чем в нее втекает. Это означает, что внутри области имеются дополнительные *источники*.

Если $\Pi < 0$, то внутри области *V* имеются *стоки*, поглощающие избыток жидкости.

Можно сказать, что источники – точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки – точки, где векторные линии кончаются. Так, в электростатическом поле источником является положительный заряд, стоком – отрицательный заряд.

Если $\Pi = 0$, то из области *V* вытекает столько же жидкости, сколько в нее втекает в единицу времени; внутри области либо нет ни источников, ни стоков, либо они таковы, что их действие взаимно компенсируется.

Пример. Дано электрическое векторное поле, в каждой точке которого по закону Кулона действует вектор

$$\vec{F} = (ae/r^2)\,\vec{r}_0 ,$$

где *r* – расстояние данной точки от начала координат, *e* – положительный электрический заряд, $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный по радиусу-вектору данной точки, *a* – const. Определить поток векторного поля через сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Решение. Поток равен поверхностному интегралу

$$\Pi = \iint_S \vec{F}\vec{n} dS = \iint_S \frac{ae}{r^2}\vec{r}_0\vec{n} dS.$$

Точки сферы S отстоят от начала координат на расстоянии $r = R = \text{const}$. Нормальный вектор к поверхности S параллелен радиусу-вектору, поэтому $\vec{r}_0\vec{n} = 1$, тогда

$$\Pi = \frac{ae}{R^2}\iint\limits_S dS = \frac{ae}{R^2}S_{\text{сф}} = \frac{ae}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi ae\,.$$

Формула Остроградского-Гаусса

Область Т в пространстве, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Σ, называется *простым телом*, если всякая прямая, проходящая через точку $M \in \text{T}$ и параллельная координатной оси, пересекает Σ не более чем в двух точках.

Связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть Т - простое тело, а $\Sigma = \partial\text{T}$ - кусочно-гладкая поверхность. Функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ и их частные производные $P_x'(M)$, $Q_y'(M)$, $R_z'(M)$ непрерывны на множестве $\text{T}\cup\Sigma$. Пусть Σ^+ - внешняя сторона поверхности Σ. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{\text{T}\cup\Sigma}\left(P_x'(M) + Q_y' + R_z'(M)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma^+}P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

которая называется формулой Остроградского – Гаусса.

Доказательство. Представим внешнюю сторону поверхности в виде объединения незамкнутых частей: $\Sigma^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^0 \cup \Sigma_3^-$ (см. рисунок 1). Пусть поверхность Σ_1^+ задана явно уравнением $z = f_1(x,\, y)$, $(x,\, y) \in D$, поверхность Σ_3^- задана явно уравнением $z = f_2(x,\, y)$, $(x,\, y) \in D$. Функции $f_1(x,\, y)$, $f_2(x,\, y)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутой области D. Поверхность Σ_2^0 - цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz.

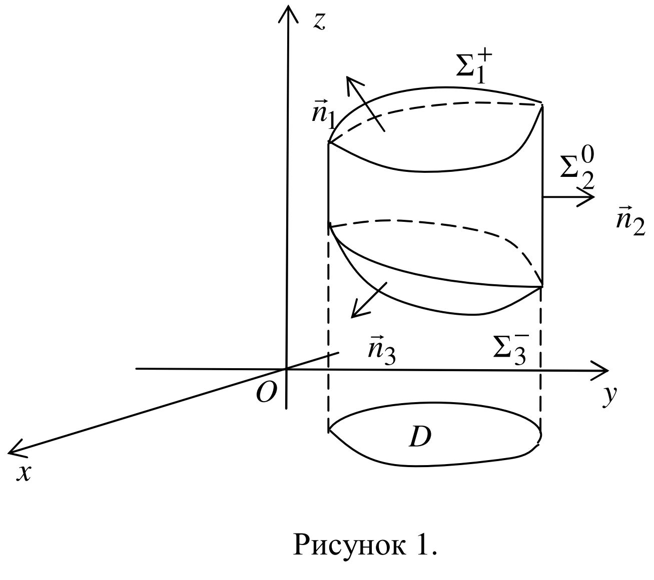

Рисунок 1.

Поскольку тройной интеграл в доказываемой формуле можно представить суммой тройных интегралов от каждого слагаемого подынтегральной функции, то рассмотрим, к примеру, интеграл от функции $R_z'(M)$.

$$\iiint\limits_{T\cup\Sigma} R'_z(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int\limits_{f_2(x,\,y)}^{f_1(x,\,y)} R'_z(M)\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} R(M)\Big|_{f_2(x,\,y)}^{f_1(x,\,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{D}\big(R(x,\,y,\,f_1(x,\,y)) - R(x,\,y,\,f_2(x,\,y))\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} R(x,\,y,\,f_1(x,\,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$- \iint\limits_{D} R(x,\,y,\,f_2(x,\,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Поскольку $\iint\limits_{\Sigma_2^0} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, то по формулам для вычисления поверхностных интегралов второго рода и их свойствам имеем:

$$\iiint\limits_{T\cup\Sigma} R'_z(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_1^+} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2^0} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_3^-} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma^+} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Аналогично устанавливаются равенства

$$\iiint\limits_{T\cup\Sigma} P'_z(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma^+} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,\quad \iiint\limits_{T\cup\Sigma} Q'_z(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma^+} Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,.$$

Складывая почленно последние три равенства получаем формулу Остроградского-Гаусса. Теорема доказана.

Понятие дивергенции. Формула Остроградского–Гаусса в векторной форме

Важной характеристикой векторного поля является так называемая дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Дивергенцией (или расходимостью) *векторного поля*

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

в точке *M* называется скаляр вида $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\vec{a}(M)$, т.е.

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Отметим некоторые свойства дивергенции.

1. Если $\vec{a}$ – постоянный вектор, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.
2. $\operatorname{div}(c\cdot\vec{a}) = c\cdot\operatorname{div}\vec{a}$, где $c = \mathrm{const}$.
3. $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$.
4. Если U – скалярная функция, $\vec{a}$ – вектор, то $\operatorname{div}(U\cdot\vec{a}) = U\cdot\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}U$.

Используя понятие потока и дивергенции векторного поля, запишем формулу Остроградского–Гаусса в так называемой векторной форме.

Рассматривая область *V*, ограниченную замкнутой поверхностью *S*, можно утверждать, что левая часть формулы Остроградского-Гаусса есть поток вектора $\vec{a}$ через поверхность *S*; подынтегральная функция правой части формулы есть дивергенция вектора $\vec{a}$. Следовательно, формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде

$$\Pi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}dxdydz.$$

Формула Остроградского–Гаусса означает, что *поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному данной поверхностью.*

Как видно из определения дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Исходя из физического смысла потока (обычно условно считают, что $\vec{a}(M)$ есть поле скоростей фиктивного стационарного потока несжимаемой жидкости), можно сказать, что: при $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, откуда жидкость вытекает; при $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$ точка M есть сток, поглощающий жидкость. Как следует из последнего равенства, *величина* $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ *характеризует мощность (интенсивность, плотность) источника или стока в точке М*. В этом состоит *физический смысл дивергенции*.

Понятно, что если в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, нет ни источников, ни стоков, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, т.е $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, называется *соленоидальным.*

Пример. Найти поток радиуса вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность S: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$ $(0 \le z \le 1)$.

Решение. Найдем дивергенцию данного векторного поля: $\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

Искомый поток найдем по формуле Остроградского–Гаусса (при вычислении нтеграла используем цилиндрические координаты):

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{r}dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho} dz =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho(1-\rho)d\rho = 3\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi.$$

Циркуляция векторного поля

Пусть векторное поле образовано вектором $\vec{a}(M)$. Возьмем в этом поле некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление (рис. 2).

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки M на контуре L. Известно, что вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ направлен по касательной к кривой в направлении ее обхода (рис. 2) и $|d\vec{r}| = dl$, где dl – дифференциал дуги кривой ($dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$).

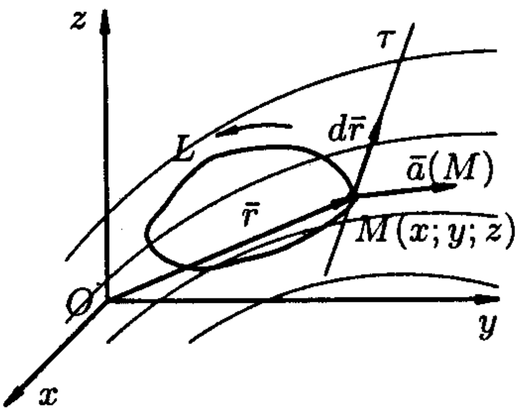

Рис. 2

Криволинейный интеграл по замкнутому L от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\overline{dr}$, касательный к контуру L, называется *циркуляцией* вектора $\vec{a}$ вдоль L, т.е.

$$C = \oint_L \vec{a}\cdot\overline{dr}.$$

Так как $\overline{a} \cdot \overline{dr} = Pdx + Qdy + Rdz$, то последнее равенство можно также записать в виде

$$C = \oint_L (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Циркуляция C, записанная в этом виде имеет простой *физический смысл*: *если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция – это работа силы* $\vec{a}(M)$ *поля при перемещении материальной точки вдоль L.*

Пример. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вдоль окружности L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ в положительном направлении.

Решение. Параметрические уравнения данного контура L имеют вид

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Найдем циркуляцию, сводя вычисление криволинейного интеграла второго рода к вычислению определенного интеграла по параметру t:

$$C = \oint_C \vec{a}d\vec{r} = \oint_L Pdx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \oint_L \left(x^2 - y\right)dx + xdy + dz = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin t\right) d\cos t + \int_0^{2\pi} \cos t d\sin t + \int_0^{2\pi} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t - \cos^2 t \sin t + \cos^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t d\cos t = 2\pi + \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi.$$