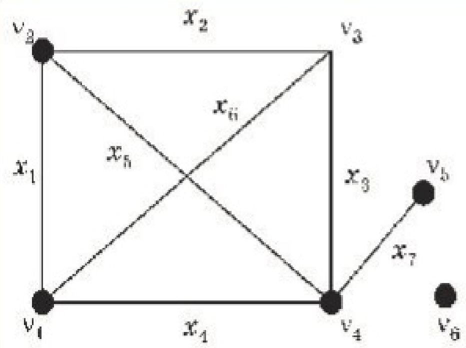
Лекция. Основные понятия теории графов

Основные понятия для графа	**Пример**
Граф — система объектов, находящихся в некоторых отношениях друг с другом. Множество объектов V — вершины графа, отношения между объектами X — ребра графа. Обозначение: $G(V, X)$, где $X \subset V \times V$	
Если $x = (v_i, v_j)$ — ребро графа, то вершины v_i и v_j *инцидентны* ребру x	Вершины v_2 и v_4 инцидентны ребру x_5, являются смежными
Две вершины *смежные*, если принадлежат одному ребру	
Степень вершины $d(v)$ — число ребер, которым вершина v инцидентна. Вершина v может быть: *изолированная*, если $d(v) = 0$; *висячая*, если $d(v) = 1$; *четная*, если $d(v)$ — четное число	$d(v_2) = 3$, вершина v_5 — висячая, вершина v_6 — изолированная
Маршрут для графа $G(V, X)$ — чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны $v_1x_1v_2x_2v_3\ldots x_kv_{k+1}$. *Длина маршрута* — количество ребер в нем	Если $M = v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$, то $\lvert M \rvert = 4$
Маршрут *замкнутый*, если его начальная и конечная вершины совпадают	$v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2x_1v_1$
Маршрут называется *цепью*, если имеет различные ребра. Цепь *простая*, если в ней все вершины попарно различны	$v_2x_2v_3x_3v_4$
Цикл — замкнутый маршрут. *Цикл простой*, если в нем все вершины попарно различны	$v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$ — простой цикл
Две вершины графа *связные*, если существует соединяющая их простая цепь	Вершины v_1 и v_3 — связные

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Основные понятия для орграфа. Если элементы множества X графа $G(V, X)$ упорядоченные пары, то граф называется *ориентированным*, или *орграфом*.

$x = (v_i, v_j)$ — дуга орграфа, где вершина v_i — начало, а вершина v_j — конец дуги x. Дуга вида $x = (v, v)$ — *петля*, т. е. начальная и конечная вершины совпадают. Петля обычно считается неориентированной.

Граф называется *псевдографом*, если содержит петли.

Степень входа вершины орграфа — число входящих в вершину ребер, *степень выхода* — число выходящих из вершины ребер.

Источником называется вершина, степень входа которой равна нулю, а степень выхода положительна.

Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю.

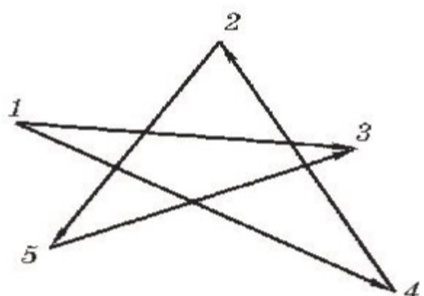
Изолированная вершина орграфа — вершина, у которой степень входа и степень выхода равна нулю.

Маршрут в орграфе называется *путем*, если все его дуги различны.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФА

<table>
<tr><th>Способ задания</th><th>Определение</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>Аналити-</td><td>Задание бинарного отноше-</td><td>$V = \{1, 2, 3, 4\}$</td></tr>
<tr><td>Матрица инциденций</td><td>Для неориентированного графа
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i \text{ инцидентна ребру } x_j; \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$
Для орграфа
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ исходит из } v_i; \\ -1, \text{ если } x_j \text{ заходит в } v_i; \\ 0, \text{ если } x_j \text{ не инцидентна } v_i \end{cases}$$</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>(1,2)</th><th>(1,3)</th><th>(1,4)</th><th>(2,3)</th><th>(2,4)</th><th>(3,4)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>−1</td><td>0</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>−1</td><td>0</td><td>−1</td><td>−1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Задание 3.3 (1). Выберите один вариант ответа.
Матрица смежности орграфа (рис. 8) имеет вид...



ВИДЫ ГРАФОВ

Граф *связный*, если каждые две его вершины связные.

Граф *полный* — граф без кратных ребер, в котором любые две его вершины соединены одним ребром.

Граф *планарный,* если его можно изобразить на плоскости так, что все пересечения его ребер являются вершинами графа. Такое изображение графа на плоскости называется *плоским*.

Графы $G(X, V)$ и $G'(X', V')$ *изоморфны*, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что вершины $v_i', \ v_j' \in V'$ графа G' соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины $v_i, v_j \in V$ графа G соединены ребром.

Пример (рис. 12). $G_1(X, V)$ — полный, связный и планарный.

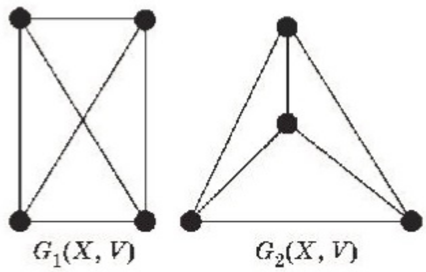


Рис. 12

$G_2(X, V)$ — плоское изображение графа $G_1(X, V)$.

Графы $G_1(X, V)$ и $G_2(X, V)$ изоморфны.

Задание 3.4 (1). Выберите один вариант ответа.

Из представленных графов (рис. 13) не изоморфен остальным граф...

Варианты ответа:

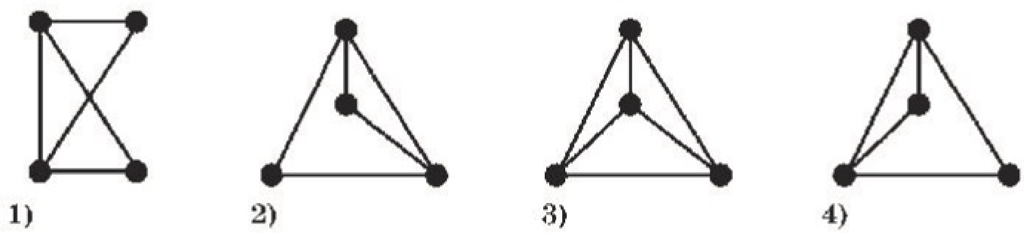
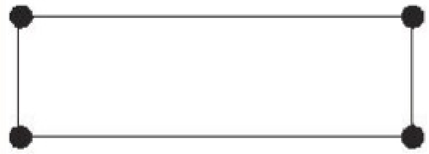
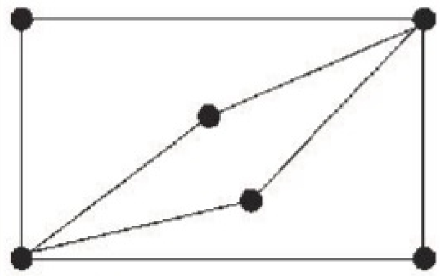
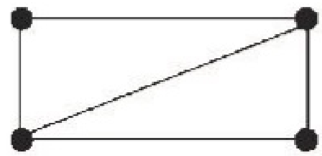
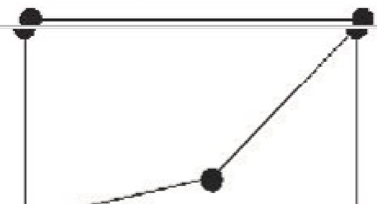


Рис. 13

Решение. Третий граф, содержащий шесть ребер, не изоморфен графам 1, 2 и 4, содержащим по пять ребер.

ТИПЫ ГРАФОВ

Определение	Условия существования	Иллюстрирующие примеры
Путь (цикл), содержащий все ребра графа и притом по одному разу, называется *эйлеровым* путем (циклом). Граф, обладающий эйлеровым циклом (путем), называется *эйлеровым графом*	*Критерий существования эйлерова цикла*: связный неориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин графа четные. *Критерий существования эйлерова пути*: связный неориентированный граф содержит эйлеров путь тогда и только тогда, когда имеет ровно две вершины нечетной степени	 Есть эйлеров и гамильтонов цикл.  Есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова цикла.
Путь (цикл), содержащий все вершины графа по одному разу, называется *гамильтоновым*. Граф, обладающий гамильтоновым циклом (путем), называется *гамильтоновым графом*	*Достаточные условия существования гамильтоновых циклов* 1. Всякий полный граф является гамильтоновым. 2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым. 3. Если граф имеет гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы	 Есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла.  Нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла