Лекция 10. Поверхностные интегралы

Поверхности в трехмерном пространстве

Для определения поверхностных интегралов, которое предпримем в дальнейшем, необходимо дать определение поверхности, способы задания поверхностей.

Ранее поверхность определялась как совокупность точек пространства $Oxyz$, координаты x, y, z которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D - область на плоскости Oxy, или уравнением $x = f(y, z)$, $(y, z) \in E$, где E - область на плоскости Oyz, а также уравнением $y = f(x, z)$, $(x, z) \in G$, где G - область на плоскости Oxz. Каждое из приведенных уравнений называется *явным заданием поверхности*. Если, к примеру, $z = f(x, y)$ непрерывная в области D функция, то поверхность, заданная этим уравнением называется *непрерывной поверхностью*.

Определялась непрерывная поверхность также как совокупность точек пространства $Oxyz$, координаты которых x, y, z удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ с непрервной в некоторой пространственной области функцией $F(x, y, z)$. Такая поверхность называется *поверхностью, заданной неявно*.

Наряду с упомянутыми определениями поверхности и их заданиями будут использоваться следующие определения.

Поверхностью называется *непрерывное отображение плоской области D пространство $Oxyz$, определяемое системой функций*

$$S: \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in D, \end{cases}$$

причем φ, ψ, χ - непрерывные функции, определенные в области D (см. рисунок 1). Эта система функций называется *задание поверхности параметрически*. Переменные u и v называются *параметрами*. Указанное отображение каждой точке (u, v) из области D ставит в соответствие точку (x, y, z) трехмерного пространства. Совокупность всех таких точек пространства и образует поверхность.

К примеру, параметрическое задание поверхности можно записать так:

$$S: \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \quad (u, v) \in D, \end{cases}$$

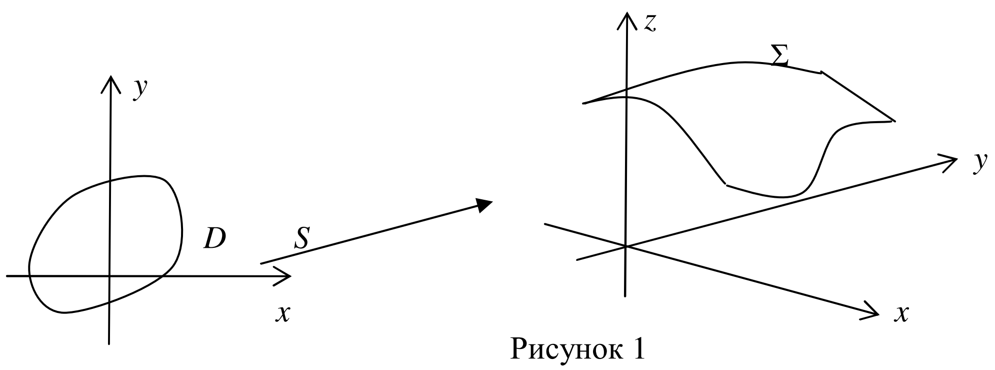

Рисунок 1

С помощью уравнений системы S можно записать вектор

$$\vec{r}(u,\,v)=\varphi(u,\,v)\vec{i}+\psi(u,\,v)\vec{j}+\chi(u,\,v)\vec{k},\;(u,\,v)\in D\,,$$

являющимся радиусом – вектором точки $M(x,\,y,\,z)$ поверхности (см. рисунок 2). Задание поверхности Σ в виде $\vec{r}=\varphi\vec{i}+\psi\vec{j}+\chi\vec{k}$ называется *заданием поверхности в векторной форме.*

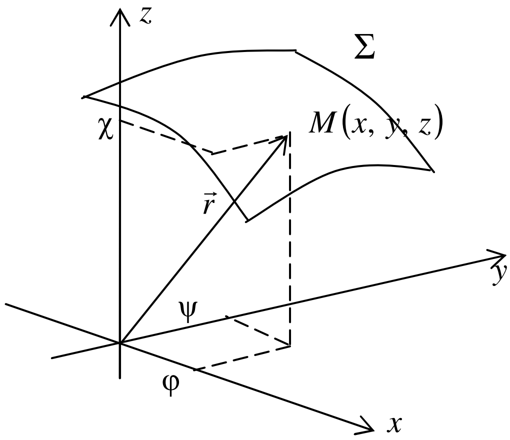

Рисунок 2

В дальнейшем, рассматривая все виды задания поверхностей, будем предполагать выполнения следующих условий.

1. Область D ограничена и замкнута, а ее граница ∂D является кусочно-гладкой кривой без точек самопересечений.

2. Различным внутренним точкам (u,v) области D соответствуют при отображении S различные точки $(x,\,y,\,z)$ поверхности.

Поверхность называется *простой*, если условие 2 выполняется также и для граничных точек области D.

Множество точек поверхности, соответствующие граничным точкам области D, составляют *границу поверхности*, или *край поверхности*. Точки поверхности, не принадлежащие краю, называются *внутренними точками поверхности*.

Понятие гладкой поверхности. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Поверхность Σ называется *гладкой*, если для любой ее внутренней точки M существует такая окрестность, которая вырезает часть поверхности Σ, допускающую явное задание хотя бы одного из выше перечисленных видов, где f - непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть поверхность Σ задана неявно уравнением

$$F(x,\,y,\,z)=0\,.$$

Тогда при условии непрерывности в окрестности внутренней точки $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ частных производных $F'_x(M),\;F'_y(M),\;F'_z(M)$ и отличия от нуля хотя бы одной из этих производных в точке M_0, существует касательная к поверхности Σ в точке M_0 с уравнением

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0\,.$$

Вектор

$$\mathrm{grad} F(M_0) = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k}$$

является вектором нормали к поверхности Σ в точке M_0. Запишем уравнение нормали к поверхности, проходящей через точку M_0:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть Σ - гладкая ограниченная поверхность. Пусть в точках поверхности Σ определена функция $g(M) = g(x, y, z)$. Разобьем ее кусочно-гладкими кривыми на конечное число *n* частей Σ_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ так, что каждая часть Σ_i однозначно проектировалась на касательную плоскость, проведенную в любой точке части Σ_i. Пусть точка $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Sigma_i$ произвольная. Число $\Delta\sigma_i$ - площадь части Σ_i. Вычислим сумму

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} g(M_i)\Delta\sigma_i,$$

которая называется интегральной суммой.

Пусть число $d_i = \sup\limits_{M', M'' \in \Sigma_i} \rho(M', M'')$ - диаметр части Σ_i, где величина $\rho(M', M'')$ есть расстояние между точками M' и M''; а число $d^{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$ - мелкость разбиения поверхности Σ.

Каждому значению натурального числа *n* соответствует число s_n. Таким образом, имеем числовую последовательность $\{s_n\}$. Если существует конечный предел последовательности $\{s_n\}$ при $n \to \infty$ и $d^{(n)} \to 0$, не зависящий от способа разбиения поверхности Σ и выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода от функции* $g(M)$ *по поверхности* Σ и обозначается символом

$$\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma.$$

Приведем основные свойства поверхностных интегралов первого рода. Предполагаем существование поверхностных интегралов первого рода от функций $g(M)$, $g_1(M)$, $g_2(M)$ по соответствующим поверхностям.

1. $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma = S$, где S - площадь поверхности Σ.

2. $\iint\limits_{\Sigma} Cg(M)\mathrm{d}\sigma = C\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma$, где C - число.

3.
$$\iint\limits_{\Sigma}\left(g_1(M)+g_2(M)\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Sigma}g_1(M)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{\Sigma}g_2(M)\mathrm{d}\sigma.$$

Последние два свойства обобщаются следующим свойством линейности поверхностного интеграла.

4. $\iint\limits_{\Sigma}\left(C_1g_1(M)+C_2g_2(M)\right)\mathrm{d}\sigma=C_1\iint\limits_{\Sigma}g_1(M)\mathrm{d}\sigma+C_2\iint\limits_{\Sigma}g_2(M)\mathrm{d}\sigma$, где C_1 и C_2 - числа.

5. Пусть $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$, пересечение поверхностей Σ_1 и Σ_2 возможно по краям, то

$$\iint\limits_{\Sigma}g(M)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}g(M)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{\Sigma_2}g(M)\mathrm{d}\sigma.$$

6. Если для каждой точки $M\in\Sigma$ верно неравенство $g_1(M)\le g_2(M)$, то

$$\iint\limits_{\Sigma}g_1(M)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{\Sigma}g_2(M)\mathrm{d}\sigma.$$

7. Имеет место оценка интеграла

$$\left|\iint\limits_{\Sigma}g(M)\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint\limits_{\Sigma}|g(M)|\mathrm{d}\sigma.$$

Вычисление поверхностного интеграла можно свести к вычислению двойного интеграла по области. Приведем формулы для случаев явного задания поверхности.

Пусть поверхность Σ задана уравнением $z=f(x,\ y)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma}g(M)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}g(x,\ y,\ f(x,\ y))\sqrt{1+f_x'^2(x,\ y)+f_y'^2(x,\ y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Если поверхность Σ задана уравнением $x=f(y,\ z)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma}g(M)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{E}g(f(y,\ z),\ y,\ z)\sqrt{1+f_y'^2(y,\ z)+f_z'^2(y,\ z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Пусть поверхность Σ задана уравнением $y=f(x,\ z)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma}g(M)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{G}g(x,\ f(x,\ z),\ z)\sqrt{1+f_x'^2(x,\ y)+f_z'^2(x,\ y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода

Приведем некоторые геометрические и механические приложения поверхностных интегралов первого рода.

1. Вычисление площади поверхности. $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma=S$, где S - площадь поверхности Σ.

2. Масса поверхности. Вычисляется масса материальной поверхности, вдоль которой распределены массы с определенной в каждой точке поверхностной плотностью.

Пусть в каждой точке M поверхности Σ определена поверхностная плотность массы $\rho(M) = \rho(x, y, z)$, а m - масса поверхности. Разобьем поверхность на малые части Σ_i, $i = \overline{1, n}$. Будем считать, что масса части Σ_i равна $\rho(M_i)\Delta\sigma_i$, где произвольная точка $M_i \in \Sigma_i$, $\Delta\sigma_i$ - площадь части Σ_i, предполагая, что в пределах части Σ_i плотность постоянна и равна $\rho(M_i)$.Чем меньше размеры части Σ_i, тем ближе значение $\rho(M_i)\Delta\sigma_i$ к истинной величине массы части Σ_i. Суммируя по всем частя разбиения поверхности, получаем приближенное равенство $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta\sigma_i$, причем в правой части записана интегральная сумма для поверхностного интеграла первого рода от функции $\rho(M)$ по поверхности Σ.

За точное значение массы материальной поверхности Σ принимается придел последовательности интегральных сумм при неограниченном увеличении числа частей разбиения и уменьшения максимума $d^{(n)}$ диаметров этих частей, то есть поверхностный интеграл первого рода

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d^{(n)} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\Sigma} \rho(M)\mathrm{d}\sigma.$$

Двусторонние и односторонние поверхности. Ориентация поверхности

Пусть $\vec{n}(M)$ есть единичный вектор нормали в произвольной точке некоторой кусочно-гладкой поверхности Σ. Поверхность называется *двусторонней поверхностью*, если при движении точки M по произвольному простому контуру, не пересекающегося с краем поверхности (если таковой имеется), вектор $\vec{n}(M)$ не изменит первоначального направления. Если найдется контур, при обходе которого вектор $\vec{n}(M)$ изменит свое первоначальное направление на противоположное, то такая поверхность называется *односторонней поверхностью*.

Приведем примеры двусторонних и односторонних поверхностей.

Примеры.

1. Параболоид $z = x^2 + y^2$, $z \le h$ - двусторонняя поверхность (см. рисунок 3).

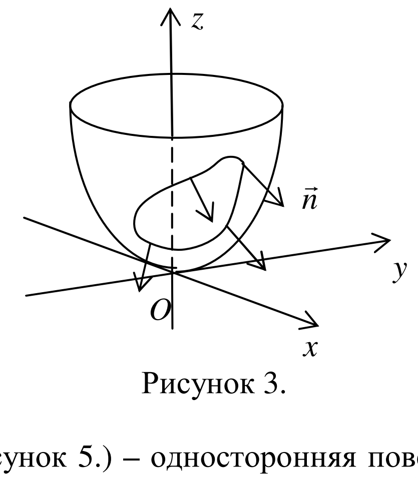

Рисунок 3.

2. Лист Мебиуса (см. рисунок 5.) – односторонняя поверхность. На рисунке 5 пунктирной линией изображен контур, при обходе которого вектор $\vec{n}(M)$ изменяет первоначальное направление на противоположное направление. Лист Мебиуса можно получить склеиванием полоски бумаги (см. рисунок 4) по отрезкам AB и $A'B'$ так, чтобы точка A совпала с точкой A', точка B - с точкой B'.

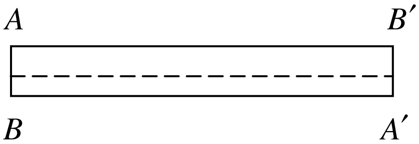

Рисунок 4.

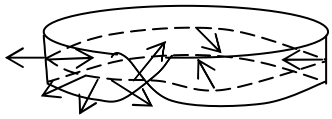

Рисунок 5.

Если каждой точке M гладкой поверхности Σ поставлен в соответствие вектор нормали $\vec{n}(M)$, то говорят, что на Σ задано *поле нормалей*. На каждой двусторонней поверхности можно задать два поля нормалей, противоположных по направлению: $\vec{n}(M)$ $-\vec{n}(M)$. Выбор одного из этих полей называется выбором *стороны поверхности*. Выбор определенной стороны поверхности называется *ориентацией поверхности*. Например, плоскость, сфера, параболоиды – двусторонние поверхности и они ориентируемы. Лист Мебиуса неориентируемая поверхность, поскольку является односторонней поверхностью.

Поверхностные интегралы второго рода

Пусть Σ - гладкая или кусочно-гладкая ограниченная поверхность. Выберем одну из ее сторон, определяемую полем нормалей $\vec{n}(M)$. Пусть $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ - углы, которые вектор $\vec{n}(M)$ составляет с осями координат. Предположим, на поверхности заданы функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Поверхностные интегралы первого рода

$$\iint_{\Sigma} P(M)\cos\alpha(M)d\sigma,\ \iint_{\Sigma} Q(M)\cos\beta(M)d\sigma,\ \iint_{\Sigma} R(M)\cos\gamma(M)d\sigma$$

называются *поверхностными интегралами второго рода* соответственно от функций $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ по выбранной стороне поверхности Σ.

Рассмотрим поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} R(M)\cos\gamma(M)d\sigma$. Пусть $M_i \in \Sigma_i$, Σ_i, $i=\overline{1,n}$ - части разбиения поверхности Σ. Выберем сторону поверхности, для которой $\cos\gamma(M)>0$. Разобьем Σ на части Σ_i и области D на части D_i плоскостями $x=x_i$ и $y=y_i$, $i=\overline{0,n}$ (см. рисунок 6.). Пусть Π_i - проекция

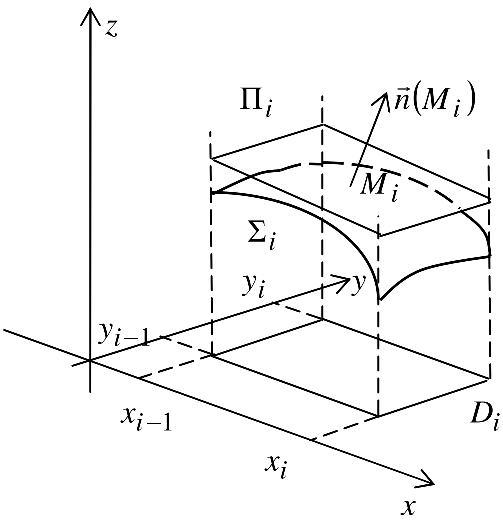

Рисунок 6.

Σ_i на касательную плоскость, проведенную к поверхности Σ в точке M_i ($M_i \in \Pi_i$), p_i - площадь Π_i, $\Delta x_i \Delta y_i$ - площадь D_i. Тогда

$$\Delta\sigma_i \approx p_i,\ \Delta x_i \Delta y_i = p_i \cos\gamma(M_i) \approx \Delta\sigma_i \cos\gamma(M_i),\ \Delta\sigma_i \approx \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos\gamma(M_i)}.$$

Получили соотношение между элементами площади поверхности и площади плоской области, расположенной в координатной плоскости Oxy:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma(M)}.$$

Если на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma(M) < 0$, то в последнем соотношении перед дробью нужно поставить знак минус. Отсюда следует обозначение интеграла:

$$\iint_{\Sigma} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Приведем обозначения первых двух интегралов:

$$\iint_{\Sigma} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \iint_{\Sigma} Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Приведем основные свойства поверхностных интегралов второго рода.

1. Если Σ^+ и Σ^- - различные стороны поверхности Σ, то

$$\iint_{\Sigma^+} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma^-} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

то есть поверхностный интеграл второго рода зависит от ориентации поверхности. Действительно, пусть

$$I_1 = \iint_{\Sigma^+} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(M)\cos\gamma(M)\mathrm{d}\sigma,\ I_2 = \iint_{\Sigma^-} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Тогда

$$I_2 = \iint_{\Sigma} R(M)\cos(\pi - \gamma(M))\mathrm{d}\sigma = -\iint_{\Sigma} R(M)\cos\gamma(M)\mathrm{d}\sigma = -I_1.$$

2. $\iint_{\Sigma} CR(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C\iint_{\Sigma} R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где C - число.

3. $\iint_{\Sigma} (R_1(M) + R_2(M))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R_1(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma} R_2(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Последние два свойства обобщаются следующим свойством линейности поверхностного интеграла.

4. $\iint\limits_{\Sigma}(C_1R_1(M)+C_2R_2(M))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C_1\iint\limits_{\Sigma}R_1(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C_2\iint\limits_{\Sigma}R_2(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

где C_1 и C_2 - числа.

5. Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, пересечение поверхностей Σ_1 и Σ_2 возможно по краям, то

$$\iint\limits_{\Sigma}R(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1}R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2}R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Получим формулы для вычисления поверхностных интегралов.

Пусть гладкая поверхность Σ задана явным уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ и выбрана верхняя сторона поверхности, то есть $\vec{n}(M) = -f'_x(x, y)\vec{i} - f'_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}$, то

$$\cos\gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}} > 0.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\Sigma}R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma}R(M)\cos\gamma(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D}R(x, y, f(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Если выбрана другая сторона поверхности, то $\cos\gamma(M) < 0$ и тогда

$$\iint\limits_{\Sigma}R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma}R(M)\cos\gamma(M)\mathrm{d}\sigma = -\iint\limits_{D}R(x, y, f(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

что согласуется со свойством поверхностного интеграла второго рода.

Пусть гладкая поверхность Σ задана явным уравнением $x = f(y, z)$, $(y, z) \in E$. Выбрав поле векторов нормалей $\vec{n}(M) = \vec{i} - f'_y(y, z)\vec{j} - f'_z(y, z)\vec{k}$, осуществим выбор верхней стороны поверхности (в данном случае верхняя сторона обращена в сторону положительного направления оси Ox), причем в точках этой стороны

$$\cos\alpha(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_y(y, z) + f'^2_z(y, z)}} > 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma}P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma}P(M)\cos\alpha(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{E}P(f(y, z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Пусть гладкая поверхность Σ задана явным уравнением $y = f(x, z)$, $(x, z) \in G$. Для верхней стороны (в данном случае верхняя сторона обращена в сторону положительного направления оси Oy) имеем: $\vec{n}(M) = -f'_x(x, z)\vec{i} + \vec{j} - f'_z(x, z)\vec{k}$,

$$\cos\beta(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, z) + f'^2_z(x, z)}} > 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} Q(M)\cos\beta(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{G} Q(x,\ f(x,\ z),\ z\ )\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,.$$

Сумма интегралов

$$\iint\limits_{\Sigma} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

называется *общим поверхностным интегралом второго рода*. Для вычисления такого интеграла используют полученные выше формулы, проектируя поверхность Σ на все координатные плоскости и учитывая знаки направляющих косинусов нормального вектора в точках выбранной стороны поверхности:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{E} P(f(y,\ z),\ y,\ z\ )\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm$$

$$\pm\iint\limits_{G} Q(x,\ f(x,\ z),\ z\ )\mathrm{d}x\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{D} R(x,\ y,\ f(x,\ y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

К примеру, если выбранная сторона поверхности определена единичным вектором номали $\vec{n}_0(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \cos\beta(M)\vec{j} + \cos\gamma(M)\vec{k}$, причем $\cos\alpha(M) > 0$, $\cos\beta(M) < 0$, $\cos\gamma(M) > 0$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{E} P(f(y,\ z),\ y,\ z\ )\mathrm{d}y\mathrm{d}z -$$

$$-\iint\limits_{G} Q(x,\ f(x,\ z),\ z\ )\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint\limits_{D} R(x,\ y,\ f(x,\ y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$