Лекция 11. Основные понятия теории поля

Скалярное поле.

Теория поля – раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин.

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) *скалярное поле*. Иначе говоря, скалярное поле – это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения. Если же каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле* (или *векторная функция точки*).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, …), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха, …), электрического потенциала и т.д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического поля и т.д.

Если функция $U(M)$ ($\vec{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется *стационарным*; поле, которое меняется с течением времени, называется *нестационарным*.

Мы будем рассматривать только стационарные поля.

Если V – область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x, y, z).$$

(Наряду с обозначением $U = U(M)$, $U = U(x, y, z)$, используется запись $U = U(\vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M.)

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле $U(x, y)$ называют *плоским*.

Аналогично: вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y, z: $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ (или $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$).

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат. Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется *плоским*. Например, $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

Векторное поле называется *однородным*, если $\vec{a}(M)$ – постоянный вектор.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции ($U(x, y, z)$ – определяющие скалярное поле, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными.

Поверхности и линии уровня скалярного поля

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x, y, z)$. Для наглядного представления скалярного поля используются поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$U(x, y, z) = C .$$

Давая в этом уравнении величине C различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в рассматриваемое уравнение.

В случае плоского поля $U = U(x, y)$ равенство $U(x, y) = C$ представляет собой уравнение *линии уровня*, т.е. линия уровня – это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

Пример. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25}$;

Решение. Поверхности уровня определяются уравнением

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = C .$$

Ясно, что значение постоянной $C > 0$, так как поле принимает только положительные значения или нуль. При $C = 0$ поверхность уровня вырождается в точку $O(0,0,0)$ – начало координат. При $C > 0$ – это эллипсоиды. С увеличением C увеличиваются и полуоси эллипсоидов (рис. 1).

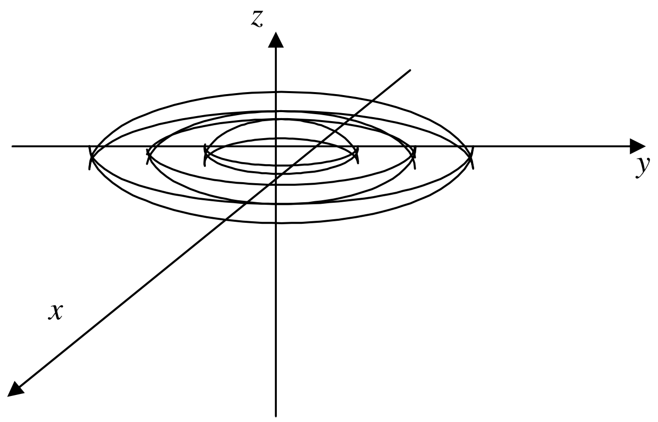

Рис. 1

Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении вводится понятие “производная по направлению”.

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x, y, z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\vec{l}$. Пусть вектор $\vec{l}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к

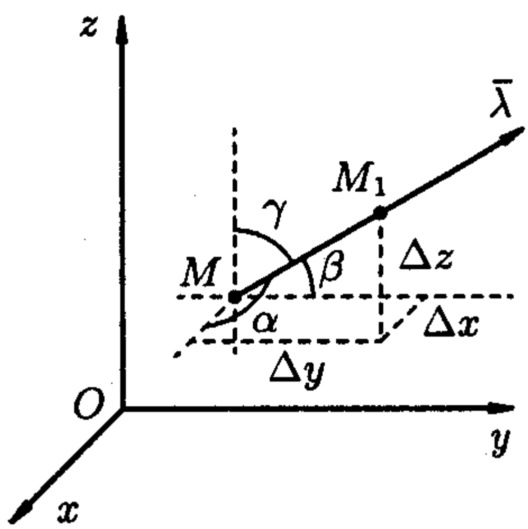

Рис. 2

некоторой близко лежащей точке N в направлении вектора $\vec{l}$ определяется как

$$\Delta U = U(N) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z)$$

(см. рис. 2). Тогда

$$\Delta l = |\overline{MN}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ .$$

Производной от функции $U = U(M)$ *в точке M по направлению* $\vec{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \lim_{N \to M} \frac{U(N) - U(M)}{|MN|}\ .$$

Производная по направлению $\vec{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\vec{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\vec{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U. В этом состоит *физический смысл производной по направлению*.

Выведем формулу для производной по направлению, считая, что функция $U(x, y, z)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее полное приращение в этой точке М можно записать так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 - бесконечно малые функции при $\Delta\lambda \to 0$. Поскольку $\Delta x = \Delta\lambda \cos\alpha,\ \Delta y = \Delta\lambda \cos\beta,\ \Delta z = \Delta\lambda \cos\gamma$, то

$$\frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \xi_1 \cos\alpha + \xi_2 \cos\beta + \xi_3 \cos\gamma\ .$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \to 0$, получим следующую формулу для вычисления производной по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

В случае плоского поля $U = U(x, y)$ формула данная примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha\ .$$

Ответим на вопрос: в каком направлении $\vec{\lambda}$ производная $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение? Это направление указывает вектор, называемый градиентом скалярного поля.

Можно заметить, что правая часть последнего равенства представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\vec{g} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}; \dfrac{\partial U}{\partial y}; \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$, называют *градиентом функции* и обозначают $\operatorname{grad} U$, т.е. $\operatorname{grad} U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}; \dfrac{\partial U}{\partial y}; \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$, или

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Отметим, что $\operatorname{grad} U$ есть векторная величина. Говорят: скалярное поле *U* порождает векторное поле градиента *U*. Теперь выражение для производной по направлению можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\vec{e} \cdot \operatorname{grad} U) = \left(\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \cdot \operatorname{grad} U\right) = \left|\operatorname{grad} U\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между вектором $\operatorname{grad} U$ и направлением $\vec{\lambda}$.

Из последней формулы сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\vec{l}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т.е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции*. В этом состоит *физический смысл градиента*.

Приведем важные свойства градиента функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.
2. $\operatorname{grad}(U + V) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V$.
3. $\operatorname{grad}(c \cdot U) = c \cdot \operatorname{grad}(U)$, $c = \text{const}$.
4. $\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$.
5. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$.
6. $\operatorname{grad} F(U) = \dfrac{\partial F(U)}{\partial U} \operatorname{grad} U$.

Пример. Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$U = xy - z^2$$

в точке *M* (-9, 12, 10). Определить производную в направлении биссектрисы координатного угла *xOy*.

Решение. Используя определение градиента, получаем:

$$\operatorname{grad} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \{y, x, -2z\}.$$

Вычислим градиент в точке *M:*

$$\operatorname{grad} U\left(M\right)=\left\{12,-9,-20\right\}.$$

Величина градиента – это модуль полученного вектора:

$$\left|\operatorname{grad} U\left(M\right)\right|=\sqrt{12^2+\left(-9\right)^2+\left(-20^2\right)}=25.$$

Направление градиента определяется направляющими косинусами:

$$\vec{l}=\frac{\operatorname{grad} U\left(M\right)}{\left|\operatorname{grad} U\left(M\right)\right|}=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}=\left\{\frac{12}{25},-\frac{9}{25},-\frac{4}{5}\right\}.$$

Единичный вектор $\vec{\lambda}$**,** исходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид:

$$\vec{\lambda}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}.$$

Производная по направлению равна скалярному произведению:

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\operatorname{grad} U\left(M\right)\cdot\vec{\lambda}=\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Векторные линии векторного поля

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

Векторной линией поля $\vec{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке *M* имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными линиями (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой*.

Векторные линии поля

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Покажем это. Пусть *PQ* – векторная линия поля, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ - радиус-вектор точки *M*. Тогда вектор $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ направлен по касательной к линии *PQ* в точке *M* (см. рис. 3). В силу

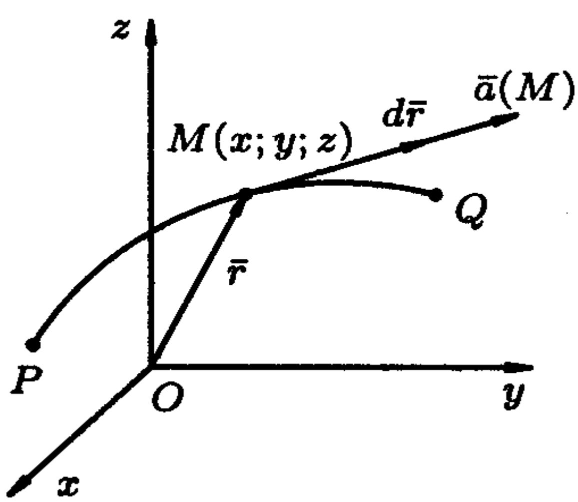

Рис. 3

коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $d\vec{r}$ следует пропорциональность их проекций.

Пример. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a} = 5x\vec{i} + 10y\vec{j}$ на плоскости:

Решение. Для нахождения векторной линии нужно решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

где P и Q – проекции вектора $\vec{a}$. В нашем случае – это уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{5x} = \frac{dy}{10y},$$

интегрируя которые, получим

$$2\ln|x| = \ln|cy|,$$

откуда $y = cx^2$, т.е. векторные линии представляют собой семейство парабол.