Лекция 13. Формула Стокса. Понятие ротора. Оператор Гамильтона. Основные виды векторных полей

Формула Стокса.

Для установления связи между криволинейными интегралами с поверхностными интегралами проведем согласование ориентации поверхности и ориентации ее границы.

Пусть Σ - двусторонняя поверхность, ограниченная контуром Γ. Задав поле векторов нормалей $\vec{n}(M)$, ориентируем поверхность. Контур Γ называется *положительно ориентированным*, если при его обходе согласно ориентации наблюдатель видит поле векторов $\vec{n}(M)$ слева от себя (см. рисунок 1). Положительно ориентированный контур Γ будем обозначать символом Γ^{+}, а контур отрицательно ориентированный, обходимый в противоположном направлении, будем обозначать символом Γ^{-}.

Если граница поверхности состоит из нескольких контуров, то для каждого из них положительная ориентация определяется таким же образом (см. рисунок 2).

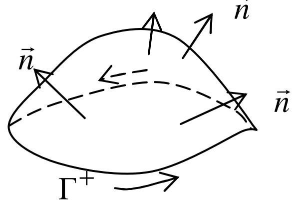

Рисунок 1.

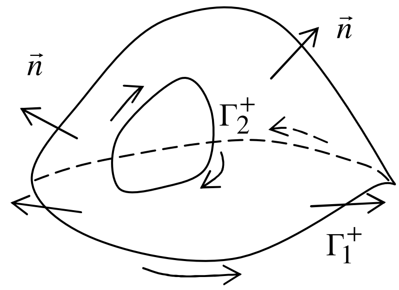

Рисунок 2.

Поверхность Σ называется *вполне проектируемой*, если она взаимно однозначно проектируется на каждую координатную плоскость системы координат $Oxyz$. Такую поверхность можно задать с помощью любого из уравнений:

$$z = z(x,\, y),\ (x,\, y) \in D,\ x = x(y,\, z),\ (y,\, z) \in E,\ y = y(x,\, z),\ (x,\, z) \in G.$$

На рисунках 3 и 4 приведены вполне проектируемые поверхности: Σ_1 с уравнением $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$ и Σ_2 с уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, расположенные в первом октанте.

К примеру, поверхность Σ_1 можно задать каждым из уравнений:

$$z = 3\left(1-\frac{x}{2}-y\right),\ (x,\, y) \in D,\ x = 2\left(1-y-\frac{z}{3}\right),\ (y,\, z) \in E,\ y = 1-\frac{x}{2}-\frac{z}{3},\ (x,\, z) \in G,$$

где D, E, G - треугольники.

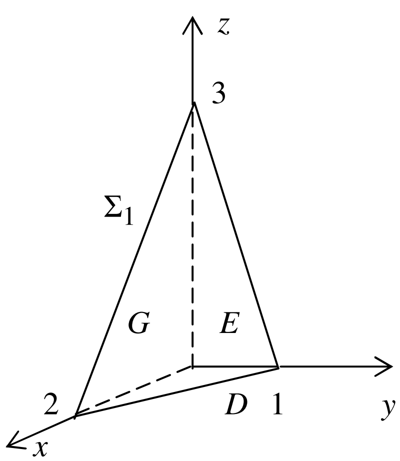

Рисунок 3

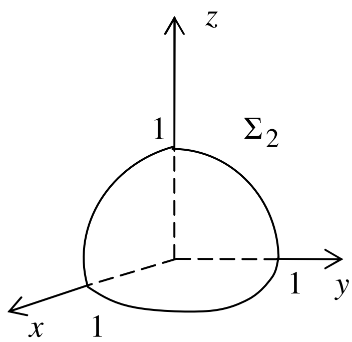

Рисунок 6

В следующем утверждении устанавливается связь между криволинейным интегралом второго рода поверхностным интегралом первого рода.

Теорема 1. Пусть Σ - вполне проектируемая ориентированная и кусочно-гладкая поверхность, Γ^+ - ее кусочно-гладкая граница, функции $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках поверхности Σ. Пусть вектор $\vec{n}_0(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \cos\beta(M)\vec{j} + \cos\gamma(M)\vec{k}$ является единичным вектором нормали к выбранной стороне поверхности. Тогда справедлива формула

$$\int_{\Gamma^+} P(M)\mathrm{d}x + Q(M)\mathrm{d}y + R(M)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{\Sigma} \Big[\big(R'_y - Q'_z\big)\cos\alpha - \big(R'_x - P'_z\big)\cos\beta + \big(Q'_x - P'_y\big)\cos\gamma\Big]\Big|_M \mathrm{d}\sigma,$$

которая называется формулой Стокса.

Доказательство. Поскольку криволинейный интеграл в правой части формулы Стокса равен сумме криволинейных интегралов от каждой функции, то рассмотрим интеграл от первой функции $P(M)$.

Предположим, что поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Пусть контур Γ^+ задан уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Спроектируем Σ на координатную плоскость Oxy и пусть Γ_1^+ - проекция Γ^+. Тогда Γ_1^+ будет задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Тогда применяя формулу для вычисления криволинейного интеграла сначала для пространственной кривой Γ^+, а затем для плоской кривой Γ_1^+, получаем:

$$I = \int_{\Gamma^+} P(M)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))x'(t)\mathrm{d}t = \int_{\Gamma_1^+} P(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x.$$

Применим к последнему интегралу формулу Грина и при этом производную P'_y найдем с использованием правила дифференцирования сложной функции:

$$I = \iint_D \big(-P'_y(x, y, z(x, y)) - P'_z(x, y, z(x, y))z'_y(x, y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= -\iint_D P'_y(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D P'_z(x, y, z(x, y))z'_y(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Тогда $I = -\iint_{\Sigma} P'_y(x, y, z)\cos\gamma(x, y, z)\mathrm{d}\sigma - \iint_{\Sigma} P'_z(x, y, z)z'_y(x, y)\cos\gamma(x, y, z)\mathrm{d}\sigma$.

Поскольку

$$\cos\gamma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + {z'_x}^2(x, y) + {z'_y}^2(x, y)}}, \quad \cos\beta(x, y, z) = -\frac{z'_y(x, y)}{\sqrt{1 + {z'_x}^2(x, y) + {z'_y}^2(x, y)}},$$

то $\cos\beta(x, y, z) = -z'_y(x, y)\cos\gamma(x, y, z)$ и тогда

$$I=-\iint\limits_{\Sigma}P'_y(x,\ y,\ z)\cos\gamma(x,\ y,\ z)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{\Sigma}P'_z(x,\ y,\ z)\cos\beta(x,\ y,\ z)\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(P'_z(M)\cos\beta(M)-P'_y(M)\cos\gamma(M)\right)\mathrm{d}\sigma\,.$$

С использование остальных уравнений вполне проектируемой поверхности Σ, получим равенства

$$\int\limits_{\Gamma^+}Q(M)\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\left(Q'_x(M)\cos\gamma(M)-Q'_z(M)\cos\alpha(M)\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$\int\limits_{\Gamma^+}R(M)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left(R'_y(M)\cos\alpha(M)-R'_x(M)\cos\beta(M)\right)\mathrm{d}\sigma$$

Сложим почленно последние три равенства:

$$\int\limits_{\Gamma^+}P(M)\mathrm{d}x+Q(M)\mathrm{d}y+R(M)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}(P'_z\cos\beta-P'_y\cos\gamma+Q'_x\cos\gamma-Q'_z\cos\alpha+R'_y\cos\alpha-$$

$$-\cos\beta)\Big|_M\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(R'_y-Q'_z\right)\cos\alpha-\left(R'_x-P'_z\right)\cos\beta+\left(Q'_x-P'_y\right)\cos\gamma\right]\Big|_M\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Получили формулу Стокса. Теорема доказана.

Приведем несколько замечаний относительно формулы Стокса.

1. Формулу Стокса можно записать в виде, содержащем поверхностный интеграл второго рода:

$$\int\limits_{\Gamma^+}P(M)\mathrm{d}x+Q(M)\mathrm{d}y+R(M)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(R'_y-Q'_z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(R'_x-P'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(Q'_x-P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\Big|_M$$

2. Если граница поверхности Σ состоит из нескольких контуров $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots,\ \Gamma_n$ то формула Стокса остается в силе и при этом записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_i^+}P(M)\mathrm{d}x+Q(M)\mathrm{d}y+R(M)\mathrm{d}z=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(R'_y-Q'_z\right)\cos\alpha-\left(R'_x-P'_z\right)\cos\beta+\left(Q'_x-P'_y\right)\cos\gamma\right]\Big|_M\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

3. Формула Стокса остается верной и в том случае, когда поверхность Σ является плоской поверхностью, параллельной какой-либо координатной плоскости (в смысле данного определения такая поверхность не является вполне проектируемой). Например, пусть поверхность Σ параллельна координатной плоскости Oxz. Тогда

$$\vec{n}_0(M)=\pm\vec{j}\,,\quad \int\limits_{\Gamma^+}Q(M)\mathrm{d}y=0\,,\ \cos\alpha(M)=0\,,\ \cos\gamma(M)=0\,.$$

Следовательно, формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma^+}P(M)\mathrm{d}x+R(M)\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{\Sigma}\left(R'_x-P'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

и является, по сути, формулой Грина.

Ротор векторного поля. Векторная форма формулы Стокса

Ротором (или вихрем) *векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ и определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Эту формулу можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства ротора.

1. Если $\vec{a}$ – постоянный вектор, то $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.
2. $\operatorname{rot}(c\cdot\vec{a}) = c\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$, где $c = \text{const}$.
3. $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$.
4. Если U – скалярная функция, а $\vec{a}(M)$ – векторная, то $\operatorname{rot}(U\cdot\vec{a}) = U\cdot\operatorname{rot}\vec{a} + \left[\operatorname{grad}U\times\vec{a}\right]$.

Используя понятия ротора и циркуляции векторного поля, запишем формулу Стокса в другом виде. Левая часть формулы Стокса представляет собой циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру *L*. Интеграл в правой части формулы Стокса представляет собой поток вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность *S*, ограниченную контуром *L*, т.е.

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$$

Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$C = \oint\limits_L \vec{a}\cdot\overline{dr} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$$

Такое представление формулы Стокса называют ее *векторной формой*. В этой формуле положительное направление на контуре *L* и выбор стороны у поверхности *S* согласовано между собой так же, как в теореме Стокса.

Последняя формула показывает, что *циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\vec{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\vec{a}$ и ограниченную контуром L* (натянутую на контур *L*).

Как видно из определения, ротор вектора $\vec{a}(M)$ есть векторная величина, образующая собственное векторное поле.

Дадим физическое истолкование понятие ротора векторного поля. Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси *Oz* с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, т.е. ротор вектора $\vec{v} = -\omega\cdot y\cdot\vec{i} + \omega\cdot x\cdot\vec{j}$. По определению ротора

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y\omega & x\omega & 0\end{vmatrix}=\left(0-\frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(0-\frac{\partial(-y\omega)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x\omega)}{\partial x}-\frac{\partial(-y\omega)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=0-0+2\omega\vec{k}=2\vec{\omega}.$$

С точностью до числового множителя ротор поля $\vec{v}$ представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название "ротор" (лат. "вращатель").

Из определения ротора вытекает, что направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке *S*.

Пример. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(x-y)\cdot\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$ вдоль контура *L*, который является линией пересечения конуса и плоскости (в положительном направлении):

$$L:\begin{cases}x^2+y^2-4z^2=0,\\ z=1/2.\end{cases}$$

Решение. Можно воспользоваться формулой Стокса, если на контур *L* «натянуть» плоскость $z = 1/2$ и вычислить поток ротора векторного поля $\vec{a}$ через эту поверхность:

$$C=\int_L \vec{a}d\vec{r}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

Найдём ротор векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-y & x & z^2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot 0+\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\cdot 2.$$

Поверхность *S* является плоскостью $z = 1/2$, поэтому $\vec{n}=\{0, 0, 1\}$.

Элемент площади поверхности *dS* можно выразить по формуле:

$$dS=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=dx\,dy,$$

поскольку $\cos\gamma = 1$.

Поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу по проекции поверхности *S* на плоскость *Oxy*, которая является кругом радиуса 1:

$$C=\iint_S 2\cdot 1dS=\iint_{Dxy} 2dxdy=2\pi.$$

Оператор Гамильтона. Векторные дифференциальные операции первого и второго порядков

Основными дифференциальными операциями над скалярным полем *U* и векторным полем $\vec{a}$ являются $\operatorname{grad}U$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называют *векторными дифференциальными операциями первого порядка.*

Эти операции удобно записывать с помощью так называемого *оператора Гамильтона*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ (читается “набла”); он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными и векторными функциями.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U$.

2. $\nabla \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}$.

3. $\left[\nabla \times \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a}$.

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются *векторные дифференциальные операции второго порядка.* Имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка:

$$\operatorname{divgrad} U,\ \operatorname{rotgrad} U,\ \operatorname{graddiv}\vec{a},\ \operatorname{divrot}\vec{a},\ \operatorname{rotrot}\vec{a}\ .$$

Запишем явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, используя оператор Гамильтона.

1. $\operatorname{divgrad} U = \nabla(\nabla U) = (\nabla\cdot\nabla)U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$.

Правая часть этого равенства называется оператором Лапласа скалярной функции U.

2. $\operatorname{rotgrad} U = \left[\nabla \times (\nabla U)\right] = \left[\nabla\times\nabla\right]U = 0$.

3. $\operatorname{graddiv}\vec{a} = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\vec{a})\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\vec{a})\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\vec{a})\cdot\vec{k} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}\ .$$

4. $\operatorname{divrot}\vec{a} = \nabla\cdot[\nabla\times\vec{a}] = \left[\nabla\times\nabla\right]\cdot\vec{a} = 0$.

5. $\operatorname{rotrot}\vec{a} = \left[\nabla\times\left[\nabla\times\vec{a}\right]\right] = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{a} = \operatorname{graddiv}\vec{a} - \Delta\vec{a}$.

Свойства основных классов векторных полей

Соленоидальное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т.е. $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела; магнитное поле прямолинейного тока и другие.

Приведем некоторые свойства соленоидального поля:

1. В соледоидальном поле $\vec{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это свойство непосредственно вытекает из формулы $\Pi = \oiint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dxdydz.$ Таким образом, соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков.

2. Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т.е. если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то существует такое поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\vec{a}$.

3. В соленоидальном поле $\vec{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое интенсивностью трубки).

Потенциальное поле

Векторное поле называется *потенциальным*, если во всех точках поля ротор равен нулю, т.е. $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда.

Приведем основные свойства потенциального поля.

1. Циркуляция потенциального поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю. Это непосредственно вытекает из формулы $C = \oint\limits_L \vec{a}\cdot\overline{dr} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$

2. В потенциальном поле $\vec{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz)$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.

3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x, y, z)$, т.е. если $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, то существует функция $U(x, y, z)$ такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad}U$. Функция $U(x, y, z)$ называется *потенциалом векторного поля* $\vec{a}$.

Пример. Показать, что векторное поле $\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + \;+(2y - xz)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$ является потенциальным, но не соленоидальным. Найти потенциал $U(x, y, z)$ данного поля.

Решение. Имеем $P = 2x - yz,\ Q = 2y - xz,\ R = 2z - xy$. По формуле

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

определяем ротор данного векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - yz & 2y - xz & 2z - xy \end{vmatrix} = (-x + x)\vec{i} + (-y + y)\vec{j} + (-z + z)\vec{k} = 0.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, то поле $\vec{a}$ – потенциальное. Далее, по формуле $\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. находим дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2z - xy) = 2 + 2 + 2 = 6\,.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$, то поле $\vec{a}$ не является соленоидальным.

Перейдем к определению потенциала поля. Составляем систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x - yz, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2y - xz, \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = 2z - xy. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по x, получаем:

$$U(x, y, z) = \int (2x - yz)dx + \varphi(y, z) = x^2 - xyz + \varphi(y, z)\,.$$

Используя второе равенство системы уравнений, получаем уравнение:

$$-xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y - xz \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \Rightarrow \{\text{интегрируем по } y\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(y, z) = \int 2y dy + \psi(z) = y^2 + \psi(z)\,.$$

Подставляем найденное выражение для функции $\varphi(y, z)$ в функцию $U(x, y, z)$, приходим к равенству: $U(x, y, z) = x^2 + y^2 - xyz + \psi(z)$. Наконец, дифференцируя полученное выражение для функции $U(x, y, z)$ по переменной z и используя последнее равенство системы, получаем $-xy + \frac{d\psi}{dz} = 2z - xy \Rightarrow \frac{d\psi}{dz} = 2z \Rightarrow \psi(z) = \int 2z dz + C = z^2 + C$. Таким образом, приходим к окончательному виду потенциала: $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz + C$.

Гармоническое поле

Векторное поле называется гармоническим, если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т.е. если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\vec{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\vec{a} = \operatorname{grad} U$, где $U(x, y, z)$ – потенциал поля. Но так как поле одновременно и соленоидальное, то $\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U = 0$, т.е. потенциальная функция U гармонического поля $\vec{a}$ является решением уравнения Лапласа.