# Лекция. Основные понятия математической логики.

## *Алгебра высказываний.*

Высказыванием называется утверждение, относительно которого известно, истинно оно или ложно, причем высказывание не может быть истинным и ложным одновременно. Используются краткие обозначения: «И» — истина, «Л» — ложь. Наряду с конкретными высказываниями, каждое из которых имеет значение «И» или «Л», будем рассматривать также переменные высказывания, значениями которых являются конкретные высказывания. Введем понятие формулы алгебры высказываний с использованием логических операций конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$, импликации $\to$ и отрицания $^{-}$.

1. Любое постоянное или переменное высказывание есть формула. Такие формулы называются элементарными.
2. Если $A$ и $B$ — формулы, то слова
$$(A)\wedge(B),\quad (A)\vee(B),\quad (A)\to(B)$$
также являются формулами.
3. Если $A$ — формула, то и $\overline{(A)}$ — формула.
4. Других формул нет.

Общее число всех логических операций, участвующих в формуле $A$, называется рангом формулы $A$ и обозначается через $r(A)$. Общее число всех постоянных и переменных высказываний, участвующих в формуле $A$, обозначим через $l(A)$ и назовем длиной формулы $A$. В определении ранга и длины формулы каждый символ операции и высказывания считается столько раз, сколько раз он входит в формулу. Для упрощения записи формул используют следующие правила сокращения числа скобок.

1. Не заключают в скобки элементарные формулы.
2. Не заключают в скобки формулу, над которой находится знак отрицания.
3. Считают, что операция $\wedge$ сильнее операции $\vee$, и обе эти операции сильнее операции $\to$.
4. Не заключают в скобки большие латинские буквы, используемые для обозначения формул (например, вместо $(A)\wedge(B)$ пишут $A\wedge B$).

Приведем индуктивное определение подформул любой формулы алгебры высказываний.

1. Подформулой элементарной формулы является лишь она сама.
2. Подформулами любой формулы вида $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\to B$ называются сама эта формула и все подформулы формул $A$ и $B$.
3. Подформулами формулы $\bar{A}$ являются сама она и все подформулы формулы $A$.

Если в формулу $A$ не входят никакие переменные высказывания, кроме переменных из некоторой фиксированной системы $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то формулу $A$ обозначают также в виде $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Если в формуле $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ заменить переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ соответственно постоянными высказываниями $a_1,a_2,\ldots,a_n$, то получится высказывание, которое обозначается в виде $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Значение этого высказывания называют значением формулы $A$ при $x_1=a_1$, $x_2=$

$= a_2, \ldots, x_n = a_n$. Таким образом, формула $A(x_1, \ldots, x_n)$ определяет отображение $\{\text{И, Л}\}^n$ в $\{\text{И, Л}\}$, называемое логической (булевой) функцией от $n$ переменных, или $n$-арной логической операцией. Формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебры высказываний называются эквивалентными, если они принимают одинаковые значения при любых значениях переменных высказываний $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эквивалентность формул $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ записывается в виде

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

или, кратко, $A \equiv B$.

Пусть $A$ — формула, не содержащая символа $\to$. Тогда формула, полученная из $A$ заменой каждого символа $\wedge$ на $\vee$, каждого символа $\vee$ на $\wedge$ и каждого постоянного высказывания на его отрицание, называется двойственной к $A$. Обозначим ее $A^*$.

**Принцип двойственности**: для любых формул $A$ и $B$ алгебры высказываний эквивалентность $A \equiv B$ имеет место тогда и только тогда, когда $A^* \equiv B^*$.

Формула $A$ алгебры высказываний называется приведенной, если

1) $A$ не содержит постоянных высказываний;
2) $A$ не содержит операции $\to$;
3) операция отрицания в $A$ относится лишь к элементарным подформулам.

Для любой формулы $A$ существует эквивалентная ей приведенная формула.

Для $\alpha \in \{0, 1\}$ и переменного высказывания $x$ обозначим:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Формулы вида

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \wedge x_{i_2}^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^{\alpha_k} \quad \text{и} \quad x_{i_1}^{\alpha_1} \vee x_{i_2}^{\alpha_2} \vee \cdots \vee x_{i_k}^{\alpha_k}, \quad k \geqslant 1,$$

называются соответственно элементарной конъюнкцией и элементарной дизъюнкцией. В каждой из этих формул переменные высказывания могут повторяться. Формула называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций. Двойственным образом определяется конъюнктивная нормальная форма (КНФ). Для каждой формулы $A$ алгебры высказываний существуют эквивалентные ей дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ формулы $A$). Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такая ДНФ, в которой все элементарные конъюнкции различны, и каждая из них имеет вид

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}.$$

Двойственным образом определяется совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Для всякой формулы

$A(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv$ Л ($A(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv$ И) существует единственная эквивалентная ей СДНФ (СКНФ) от переменных $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$.

Формула $A$ алгебры высказываний называется выполнимой, если она принимает значение «И» хотя бы на одном наборе значений содержащихся в ней переменных высказываний. В противном случае она называется тождественно ложной. Формула $A$ алгебры высказываний называется тождественно истинной, если она принимает значение «И» при любых значениях входящих в нее переменных высказываний.

Всюду далее в записи формул вида $A \wedge B$ знак $\wedge$ будет, как правило, опускаться.

## *Булевы алгебры*

Булевой алгеброй называется множество с двумя бинарными операциями $\cup$ (объединение) и $\cap$ (пересечение), одной унарной операцией $'$ (дополнение) и двумя 0-арными операциями 0 и 1, в котором выполняются тождества:

I. 1. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$,
   2. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

II. 1. $x \cup y = y \cup x$,
   2. $x \cap y = y \cap x$.

III.1. $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$,
   2. $(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z)$.

IV.1. $x \cup 0 = x$,
   2. $x \cap 1 = x$.

V. 1. $x \cup x' = 1$,
   2. $x \cap x' = 0$.

Любое логическое исчисление создается как средство доказательства утверждений или вывода одних утверждений из других в некоторой предметной области знаний и задается алфавитом, правилами образования формул в этом алфавите, набором формул, называемых аксиомами, и правилами вывода одних формул из других.

Алфавит исчисления высказываний (ИВ) состоит из тех же символов, что и в алгебре высказываний (АВ), за исключением символов для обозначения постоянных высказываний. Множество формул ИВ совпадает с множеством формул АВ, не содержащих постоянных высказываний.

В качестве аксиом ИВ здесь приняты следующие формулы (см. [14]):

I. 1) $A \to (B \to A)$,
   2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

II. 1) $AB \to A$,
   2) $AB \to B$,
   3) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to BC))$.

III.1) $A \to A \vee B$,
   2) $B \to A \vee B$,
   3) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$.

IV.1) $A \to \overline{\overline{A}}$,
   2) $\overline{\overline{A}} \to A$,
   3) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Система правил вывода ИВ состоит из одного правила, называемого правилом заключения (ПЗ) (или правилом «Modus ponens») и записываемого в виде

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Выводом формулы $A$ из множества формул $T$ называется конечная последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, в которой $A_n = A$, и каждая из формул $A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, является или аксиомой, или формулой из $T$, или получается по правилу вывода из предыдущих формул. При этом формула $A$ называется выводимой из системы $T$, что записывается в виде $T \vdash A$ или

$$B_1, B_2, \dots, B_k \vdash A,$$

если $T = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$. Формула $A$, выводимая из пустого множества формул, называется доказуемой формулой, что обозначается в виде $\vdash A$.

Если

$$B_1, B_2, \dots, B_k \vdash A,$$

то к системе правил вывода можно присоединить правило

$$\frac{B_1, B_2, \ldots, B_k}{A}.$$

Дополнительные правила вывода, построенные по указанной схеме, будут называться вспомогательными.

Формулы ИВ называются равносильными, если любая одна из них выводима из другой.

В построении выводов формул и в получении вспомогательных правил вывода зачастую используется следующая

**Теорема дедукции**. Для произвольного множества формул $T$ и любой формулы $A$ исчисления высказываний

$$T \cup \{A\} \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \to B.$$

Применив, для примера, эту теорему к аксиоме I.1), получим вспомогательное правило вывода

$$\frac{A}{B \to A}.$$