Глава 1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под *высказыванием* обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Приведем примеры высказываний.

1) Великий Новгород стоит на Волхове.
2) Париж — столица Англии.
3) Карась не рыба.
4) Число 6 делится на 2 и на 3.
5) Если юноша окончил среднюю школу, то он получает аттестат зрелости.

Высказывания 1), 4), 5) истинны, а высказывания 2) и 3) ложны.

Очевидно, предложение «Да здравствуют наши спортсмены!» не является высказыванием.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными. Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Карась — рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3», соединенных союзом «и». Высказывание 5) получается из простых высказываний «Юноша окончил среднюю школу», «Юноша получает аттестат зрелости» с помощью грамматической связки «если ..., то ...». Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

В дальнейшем будем элементарные высказывания обозначать малыми буквами латинского алфавита: x, y, z, $\ldots$, x_1, x_2, x_3, $\ldots$; истинное значение высказывания — буквой *и* или цифрой 1, а ложное значение — буквой *л* или цифрой 0.

Если высказывание a истинно, то будем писать $a = 1$, а если a ложно, то $a = 0$.

§ 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

1. Отрицание. *Отрицанием* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\overline{x}$ и читается «не x» или «неверно, что x».

Логические значения высказывания $\overline{x}$ можно описать с помощью таблицы:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть x — высказывание. Так как $\overline{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\overline{x}$, то есть высказывание $\overline{\overline{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x. Ясно, что логические значения высказываний x и $\overline{\overline{x}}$ совпадают.

Например, для высказывания «Река Волхов вытекает из озера Ильмень» отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов вытекает из озера Ильмень» или «Река Волхов не вытекает из озера Ильмень», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов не вытекает из озера Ильмень».

2. Конъюнкция (логическое умножение)**.** *Конъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x\&y$ или $(x \wedge y)$, читается «x и y». Высказывания x, y называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x\&y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2, и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Из определения операции конъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x\&\overline{x}$ всегда ложно.

3. Дизъюнкция (логическое сложение). *Дизъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается символом $y \vee y$, читается «x или y». Высказывания x, y называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Например, высказывание «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике DFE угол D острый», «В треугольнике DFE угол E острый».

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операции дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \vee \overline{x}$ всегда истинно.

4. Импликация. *Импликацией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y — ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x, y обозначается символом $x \to y$, читается «если x, то y» или «из x следует y». Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y — следствием или заключением, высказывание «$x \to$ $\to y$» — следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Например, высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Употребление слов «если ..., то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что, если высказывание x ложно, то высказывание «Если x, то y» вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида «если x, то y» в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение y вытекает из предложения x. Употребление слов «если ..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «Если x, то y». Если при этом известно, что x истинно и доказана истинность импликации $x \to y$, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения y.

5. Эквиваленция. *Эквиваленцией* (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y». Высказывания x, y называются членами эквиваленции.

Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$» является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности, и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

§ 3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний x, y, z можно построить высказывания

$$(x \& y) \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \to \overline{(y \vee (x \& z))}.$$

Первое из них есть дизъюнкция конъюнкции x, y и отрицания высказывания z, а второе высказывание есть импликация, посылкой которой является высказывание x, а заключением — отрицание дизъюнкции высказывания y и конъюнкции высказываний x, z.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется *формулой алгебры логики*. Формулы алгебры логики будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, $\ldots$.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

В связи с этим формулы

$$(x\&y) \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \to \overline{(y \vee (x\&z))}$$

могут быть записаны так:

$$x\&y \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \to \overline{y \vee x\&z}.$$

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $\overline{x\&y} \vee \overline{z}$ в случае, если $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, будет истина, то есть $\overline{x\&y} \vee \overline{z} = 1$.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например, для формулы $\overline{x} \vee y \to x\&\overline{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$x\&\overline{y}$	$\overline{x} \vee y \to x\&\overline{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Легко видеть, что, если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

§ 4. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильность формул будем обозначать знаком $\equiv$, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Например, равносильны формулы:

$$\overline{\overline{x}} \equiv x,$$
$$x \vee x \equiv x,$$
$$(x \& \overline{x}) \vee y \equiv y.$$

Формула A называется *тождественно истинной* (или *тавтологией*), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

Например, тождественно истинны формулы $x \vee \overline{x}$, $x \to (y \to x)$.

Формула A называется *тождественно ложной*, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных.

Например, тождественно ложна формула $x \& \overline{x}$.

Ясно, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ — тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ — тавтология, то формулы A и B равносильны.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

1. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ x \& x \equiv x \\ 2.\ \ x \vee x \equiv x \end{array}\right\} \text{— законы идемпотентности.}$$

3. $x \& и \equiv x$.
4. $x \vee и \equiv и$.

5. $x \& л \equiv л$.
6. $x \vee л \equiv x$.
7. $x \& \overline{x} \equiv л$ — закон противоречия.
8. $x \vee \overline{x} \equiv и$ — закон исключенного третьего.
9. $\overline{\overline{x}} \equiv x$ — закон снятия двойного отрицания.

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11.\ x \vee (y \& x) \equiv x \end{array}\right\} \text{— законы поглощения.}$$

Докажем один из законов поглощения. Рассмотрим формулу $A \equiv x \& (y \vee x)$. Если в этой формуле $x = 1$, то, очевидно, $y \vee x = 1$ и тогда $x \& (y \vee x) = 1$ как конъюнкция двух истинных высказываний. Пусть теперь в формуле A $x = 0$. Но тогда по определению операции конъюнкции будет ложной и конъюнкция $x \& (y \vee x)$. Итак, во всех случаях значения формулы A совпадают со значениями x, а поэтому $A \equiv x$.

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$.
2. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 4.\ \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \& \overline{y} \end{array}\right\} \text{— законы де Моргана.}$$

5. $x \& y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
6. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$.

Ясно, что равносильности 5 и 6 получаются из равносильностей 3 и 4 соответственно, если от обеих частей последних взять отрицания и воспользоваться законом снятия двойного отрицания. Таким образом, в доказательстве нуждаются первые четыре равносильности. Докажем две из них: первую и третью.

Так как при одинаковых логических значениях x и y истинными являются формулы $x \leftrightarrow y$, $x \to y$, $y \to x$, то истинной будет и конъюнкция $(x \to y) \& (y \to x)$. Следовательно, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые истинные значения.

Пусть теперь x и y имеют различные логические значения. Тогда будут ложными эквивалентность $x \leftrightarrow y$ и одна из двух импликаций $x \to y$ или $y \to x$. При этом будет ложной и конъюнкция $(x \to y) \& (y \to x)$. Таким образом, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые логические значения.

Рассмотрим равносильность 3. Если x и y принимают одновременно истинные значения, то будет истинной конъюнкция $x\&y$ и ложным отрицание конъюнкции $\overline{x\&y}$. В то же время будут ложными $\overline{x}$, и $\overline{y}$, а поэтому будет ложной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Пусть теперь хотя бы одна из переменных x или y принимает значение ложь. Тогда будет ложной конъюнкция $x\&y$ и истинной ее отрицание. В то же время отрицание хотя бы одной из переменных будет истинным, а поэтому будет истинной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Следовательно, во всех случаях обе части равносильности 3 принимают одинаковые логические значения.

Аналогично доказываются равносильности 2 и 4.

Из равносильностей этой группы следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Дальнейшее исключение логических операций невозможно. Так, если мы будем использовать только конъюнкцию, то уже такая формула как отрицание x не может быть выражена с помощью операции конъюнкции.

Однако существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций, которыми мы пользуемся. Такой операцией является, например, операция «Штрих Шеффера». Эта операция обозначается символом $x \mid y$ и определяется следующей таблицей истинности:

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Очевидно, имеют место равносильности:

1. $\overline{x} \equiv x \mid x$
2. $x\&y \equiv (x \mid y) \mid (x \mid y)$.

Из этих двух равносильностей следует, что всякая формула алгебры логики может быть заменена равносильной формулой, содержащей только операцию «Штрих Шеффера».

Отметим, что $x \mid y \equiv \overline{x\&y}$.

Аналогично может быть введена операция $\varphi(x, y) \equiv \overline{x \vee y}$.

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x\&y \equiv y\&x$ — коммутативность конъюнкции.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ — коммутативность дизъюнкции.
3. $x\&(y\&z) \equiv (x\&y)\&z$ — ассоциативность конъюнкции.
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ — ассоциативность дизъюнкции.
5. $x\&(y \vee z) \equiv (x\&y) \vee (x\&z)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
6. $x \vee (y\&z) \equiv (x \vee y)\&(x \vee z)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Докажем последний из перечисленных законов. Если $x = 1$, то будут истинными формулы $x \vee (y\&z)$, $x \vee y$, $x \vee z$. Но тогда будет истинной и конъюнкция $(x \vee y)\&(x \vee z)$. Таким образом, при $x = 1$ обе части равносильности 6 принимают одинаковые логические значения (истинные).

Пусть теперь $x = 0$. Тогда $x \vee (y\&z) \equiv y\&z$, $x \vee y \equiv y$ и $x \vee z \equiv z$, а поэтому и конъюнкция $(x \vee y)\&(x \vee z) \equiv y\&z$. Следовательно, здесь обе части равносильности 6 равносильны одной и той же формуле $y\&z$, и поэтому принимают одинаковые логические значения.

§ 5. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ

Используя равносильности I, II и III групп можно часть формулы или формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются *равносильными*.

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Формула A считается проще равносильной ей формулы B, если она содержит меньше букв, меньше логических операций. При этом обычно операции эквивалентность и импликация заменяются операциями дизъюнкции и конъюнкции, а отрицание относят к элементарным высказываниям. Рассмотрим ряд примеров.

1. Доказать равносильность $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee x\&y$.

Используя равносильности I, II и III групп запишем цепочку равносильных формул:

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y)\,\&\,(y \to x) \equiv (\overline{x} \vee y)\,\&\,(\overline{y} \vee x) \equiv$$
$$\equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee \overline{x}\&x \vee y\&\overline{y} \vee y\&x \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee 0 \vee 0 \vee y\&x \equiv$$
$$\equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee y\&x \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee x\&y.$$

2. Упростить формулу $(\overline{x \vee y} \to x \vee y)\,\&y$.

Запишем цепочку равносильных формул:

$$(\overline{x \vee y} \to x \vee y)\,\&y \equiv \left(\overline{\overline{x \vee y}} \vee x \vee y\right)\&y \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee x \vee y)\,\&y \equiv (x \vee y)\,\&y \equiv y.$$

3. Доказать тождественную истинность формулы

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))\,.$$

Запишем цепочку равносильных формул:

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv$$
$$\equiv \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee \left(\overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x \vee y} \vee z\right) \equiv \overline{\overline{x}}\&\overline{y} \vee \overline{\overline{y}}\&\overline{z} \vee \overline{x}\&\overline{y} \vee z \equiv$$
$$\equiv x\&\overline{y} \vee y\&\overline{z} \vee \overline{x}\&\overline{y} \vee z \equiv (x\&\overline{y} \vee \overline{x}\&\overline{y}) \vee (y\&\overline{z} \vee z) \equiv$$
$$\equiv \overline{y}\&\,(x \vee \overline{x}) \vee (y \vee z)\,\&\,(\overline{z} \vee z) \equiv \overline{y}\&1 \vee (y \vee z)\,\&1 \equiv$$
$$\equiv \overline{y} \vee y \vee z \equiv (\overline{y} \vee y) \vee z \equiv 1 \vee z \equiv 1.$$

§ 6. АЛГЕБРА БУЛЯ

Равносильности III группы говорят о том, что алгебра логики обладает коммутативными и ассоциативными законами относительно операций конъюнкции и дизъюнкции и дистрибутивным законом конъюнкции относительно дизъюнкции, эти же законы имеют место и в алгебре чисел. Поэтому над формулами алгебры логики можно производить те же преобразования, которые проводятся в алгебре чисел (раскрытие скобок, заключение в скобки, вынесение за скобки общего множителя).

Но в алгебре логики возможны и другие преобразования, основанные на использовании равносильностей:

$$(x\&y) \vee z \equiv (x \vee z)\,\&\,(y \vee z)\,,$$
$$x\&\,(y \vee x) \equiv x,$$
$$x \vee (y\&x) \equiv x,$$
$$\overline{x\&y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y},$$
$$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x}\&\overline{y} \qquad \text{и т. д.}$$

Эта особенность позволяет прийти к важным и далеко идущим обобщениям.

Рассмотрим непустое множество M элементов любой природы $\{x, \ y, \ z, \ \ldots\}$, в котором определены отношение «=» (равно) и три операции: «+» (сложение), «·» (умножение), «–» (отрицание), подчиняющиеся следующим аксиомам:

Коммутативные законы:

1а. $x + y = y + x$, 1б. $x \cdot y = y \cdot x$.

Ассоциативные законы:

2а. $x + (y + z) = (x + y) + z$, 2б. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Дистрибутивные законы:

3а. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$, 3б. $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$.

Законы идемпотентности:

4а. $x + x = x$, 4б. $x \cdot x = x$.

Закон снятия двойного отрицания:

5. $\overline{\overline{x}} = x$.

Законы де-Моргана:

6а. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, 6б. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Законы поглощения:

7а. $x + (y \cdot x) = x$, 7б. $x \cdot (y + x) = x$.

Такое множество M называется *булевой алгеброй.*

Если под основными элементами x, y, z, ... подразумевать высказывания, под операциями «+», «·», «–» дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание соответственно, а знак равенства рассматривать как знак равносильности, то, как следует из равносильностей I, II и III групп, все аксиомы булевой алгебры выполняются.

В тех случаях, когда для некоторой системы аксиом удается подобрать конкретные объекты и конкретные соотношения между ними так, что все аксиомы выполняются, говорят, что найдена *интерпретация* (или *модель*) данной системы аксиом.

Значит, алгебра логики является интерпретацией булевой алгебры. Алгебра Буля имеет и другие интерпретации. Например, если под основными элементами x, y, z, ... множества M подразумевать множества, под операциями «$+$», «$\cdot$», «$-$» — объединение, пересечение, дополнение соответственно, а под знаком равенства — знак равенства множеств, то мы приходим к алгебре множеств. Нетрудно убедиться, что в алгебре множеств все аксиомы алгебры Буля выполняются.

Среди различных интерпретаций булевой алгебры имеются интерпретации и технического характера. Одна из них будет рассмотрена ниже. Как будет показано, она играет важную роль в современной автоматике.

§ 7. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Как уже отмечалось, значение формулы алгебры логики полностью зависит от значений входящих в эту формулу высказываний. Поэтому формула алгебры логики является функцией входящих в нее элементарных высказываний.

Например, формула $(x\&y) \to \overline{z}$ является функцией трех переменных $f(x, y, z)$. Особенностью этой функции является то обстоятельство, что ее аргументы принимают одно из двух значений: ноль или единицу, и при этом функция также принимает одно из двух значений: ноль или единицу.

Определение. *Функцией алгебры логики n* переменных (или *функцией Буля*) называется функция n переменных, где каждая переменная принимает два значения: 0 и 1, и при этом функция может принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Ясно, что тождественно истинные и тождественно ложные формулы алгебры логики представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Выясним, каково число функций n переменных. Очевидно, каждую функцию алгебры логики (как и формулу алгебры логики) можно задать с помощью таблицы истинности, которая будет содержать 2^n строк. Следовательно, каждая функция n переменных принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц. Таким образом, функция n переменных полностью определяется набором значений из нулей и единиц длины 2^n. Общее же число наборов, состоящих из нулей и единиц, длины 2^n равно 2^{2^n}. Значит, число различных функций алгебры логики n переменных равно 2^{2^n}.

В частности, различных функций одной переменной четыре, а различных функций двух переменных шестнадцать. Выпишем все функции алгебры логики одной и двух переменных.

Рассмотрим таблицу истинности для различных функций одной переменной. Она, очевидно, имеет вид:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Из этой таблицы следует, что две функции одной переменной будут постоянными: $f_1(x) \equiv 1$, $f_4(x) \equiv 0$, а $f_2(x) \equiv x$, и $f_3(x) \equiv \overline{x}$.

Таблица истинности для всевозможных функций двух переменных имеет вид:

$$f_i \equiv f_i(x, y)$$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Ясно, что аналитические выражения этих функций могут быть записаны следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
f_1 \equiv 1, & f_5 \equiv \overline{x\&y}, & f_9 \equiv \overline{x \leftrightarrow y}, & f_{13} \equiv \overline{y \to x}, \\
f_2 \equiv x \vee y, & f_6 \equiv x, & f_{10} \equiv \overline{y}, & f_{14} \equiv \overline{x \to y}, \\
f_3 \equiv y \to x, & f_7 \equiv x \leftrightarrow y, & f_{11} \equiv y & f_{15} \equiv x\&y, \\
f_4 \equiv x \to y, & f_8 \equiv \overline{x}, & f_{12} \equiv \overline{x \vee y}, & f_{16} \equiv 0.
\end{array}
$$

§ 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ВИДЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики n переменных.

Рассмотрим формулу

$$
\begin{aligned}
&F(1,1,\ldots,1)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_n\vee \\
&\vee F(1,1,\ldots,1,0)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_{n-1}\&\overline{x}_n\vee \\
&\vee F(1,1,\ldots,1,0,1)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_{n-2}\&\overline{x}_{n-1}\&x_n\vee\cdots\vee \\
&\vee F(0,0,\ldots,0)\,\&\overline{x}_1\&\overline{x}_2\&\ldots\&\overline{x}_n, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

которая составлена следующим образом: каждое слагаемое этой логической суммы представляет собой конъюнкцию, в которой первый член является значением функции F при некоторых определенных значениях переменных x_1, x_2, ..., x_n, остальные же члены конъюнкции представляют собой переменные или их отрицания. При этом под знаком отрицания находятся те и только те переменные, которые в первом члене конъюнкции имеют значение 0.

Вместе с тем формула (1) содержит в виде логических слагаемых всевозможные конъюнкции указанного вида.

Ясно, что формула (1) полностью определяет функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Иначе говоря, значения функции F и формулы (1) совпадают на всех наборах значений переменных x_1, x_2, ..., x_n.

Например, если x_1 принимает значение 0, а остальные переменные принимают значение 1, то функция F принимает значение $F(0,1,1,\ldots,1)$. При этом логическое слагаемое

$F(0,1,\ldots,1)\,\&\overline{x}_1\&x_2\&\ldots\&x_n$, входящее в формулу (1), принимает также значение $F(0,1,\ldots,1)$, все остальные логические слагаемые формулы (1) имеют значение 0. Действительно, в них знаки отрицания над переменными распределяются иначе, чем в рассмотренном слагаемом, но тогда при замене переменных теми же значениями в конъюнкцию войдет символ 0 без знака отрицания, символ 1 под знаком отрицания. В таком случае один из членов конъюнкции имеет значение 0, а поэтому вся конъюнкция имеет значение 0. В связи с этим на основании равносильности $x\vee 0\equiv x$ значением формулы (1) является $F(0,1,\ldots,1)$.

Ясно, что вид формулы (1) может быть значительно упрощен, если в ней отбросить те логические слагаемые, в которых первый член конъюнкции имеет значение 0 (и, следовательно, вся конъюнкция имеет значение 0). Если же в логическом слагаемом первый член конъюнкции имеет значение 1, то, пользуясь равносильностью $1\&x\equiv x$, этот член конъюнкции можно не выписывать.

Таким образом, в результате получается формула (1), которая содержит только элементарные переменные высказывания и обладает следующими свойствами:

1) Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

2) Все логические слагаемые формулы различны.

3) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Перечисленные свойства будем называть *свойствами совершенства* или, коротко, свойствами (С).

Из приведенных рассуждений видно, что каждой не тождественно ложной функции соответствует единственная формула указанного вида.

Если функция $F(x_1,x_2,x_3)$ задана таблицей истинности, то соответствующая ей формула алгебры логики может быть получена просто. Действительно, для каждого набора значений переменных, на котором функция $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимает значение 1, запишем конъюнкцию элементарных переменных высказываний, взяв за член конъюнкции x_k, если значение x_k на указанном наборе значений переменных есть 1, и отрицание x_k, если значение x_k есть 0. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций и будет искомой формулой.

Пусть, например, функция $F(x_1, x_2, x_3)$ имеет следующую таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Для наборов значений переменных (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,0,0), на которых функция принимает значение 1, запишем конъюнкции: $x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$, $x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3$, $\overline{x}_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3$, а искомая формула, обладающая свойствами (C), имеет вид:

$$x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3 \vee x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3 \vee \overline{x}_1 \& x_2 \& \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3.$$

§ 9. ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ

Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Будем называть операцию конъюнкции двойственной операции дизъюнкции, а операцию дизъюнкции двойственной операции конъюнкции.

Определение. Формулы A и A^* называются *двойственными*, если формула A^* получается из формулы A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Например, для формулы $A \equiv (x \vee y) \& z$ двойственной формулой будет формула $A^* \equiv (x \& y) \vee z$.

Теорема. *Если формулы A и B равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, то есть $A^* \equiv B^*$.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если для формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двойственной формулой является $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то справедлива равносильность*

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Доказательство. Для элементарной формулы утверждение леммы очевидно. Действительно, если $A(x_1) \equiv x_1$, то $A^*(x_1) \equiv x_1$, $\overline{A}(x_1) \equiv \overline{x}_1$, $A^*(\overline{x}_1) \equiv \overline{x}_1$ и $\overline{A(x_1)} \equiv A^*(\overline{x}_1)$.

Пусть теперь утверждение леммы справедливо для всяких формул, содержащих не более k операций. Докажем, что при этом предположении утверждение справедливо и для формулы, содержащей и $k+1$ операцию.

Пусть формула $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит $k+1$ операцию. Тогда ее можно представить в одном из трех видов:

1) $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv \overline{A_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$,
2) $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv A_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \vee A_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
3) $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv A_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \& A_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

где формулы $A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержат не более k операций, и, следовательно, для них утверждение справедливо, то есть

$$\overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$
$$\overline{A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A_2^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

В случае 1) имеем $A^* \equiv \overline{A}_1^*$, поэтому

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{\overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}} \equiv$$
$$\equiv \overline{A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

В случае 2) имеем $A^* \equiv (A_1 \vee A_2)^* \equiv A_1^* \& A_2^*$, а поэтому

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv$$
$$\equiv \overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \& \overline{A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv$$
$$\equiv A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \& A_2^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Аналогичное доказательство проводится и в случае 3).

Докажем теперь закон двойственности.

Пусть формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Но тогда, очевидно,

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{1}$$

В то же время, согласно лемме,

$$\begin{cases} \overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), \\ \overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv B^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n). \end{cases} \tag{2}$$

Из равносильностей (1) и (2) получаем

$$A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \equiv B^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$

и, следовательно,

$$A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

§ 10. ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И СОВЕРШЕННАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (ДНФ И СДНФ)

Определение 1. *Элементарной конъюнкцией n переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.*

Элементарная конъюнкция n переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\delta_1} \& x_2^{\delta_2} \& \ldots \& x_n^{\delta_n},$$

где $x_k^{\delta_k} = \begin{cases} x_k, & \text{если} \quad \delta_k = 1, \\ \overline{x}_k, & \text{если} \quad \delta_k = 0. \end{cases}$

Определение 2. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее ДНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A \equiv x\&(x \to y)$ имеем:

$$A \equiv x\&\left(\overline{x} \vee y\right) \equiv (x\&\overline{x}) \vee (x\&y) \equiv x\&y, \qquad \text{то есть}$$

$$\text{ДНФ } A \equiv (x\&\overline{x}) \vee (x\&y)\,,$$

$$\text{ДНФ } A \equiv x\&y.$$

Среди многочисленных ДНФ A существует единственная ДНФ A, для которой выполняются перечисленные выше четыре свойства совершенства (свойства (С)).

Такая ДНФ A называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* формулы A (СДНФ A).

Как уже указывалось, СДНФ A может быть получена с помощью таблицы истинности.

Другой способ получения СДНФ формулы A основан на равносильных преобразованиях формулы и состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из ДНФ A.
2. Если в полученной ДНФ A входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B\&\left(x_i \vee \overline{x}_i\right) \equiv B$, элементарную конъюнкцию B заменяют на две элементарных конъюнкции $(B\&x_i)$ и $(B\&\overline{x}_i)$, каждая из которых содержит переменную x_i.
3. Если в ДНФ A входят две одинаковых элементарных конъюнкции B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \vee B \equiv B$.
4. Если некоторая элементарная конъюнкция B, входящая в ДНФ A, содержит переменную x_i и ее отрицание $\overline{x}_i$, то $B \equiv 0$, и B можно исключить из ДНФ A как нулевой член дизъюнкции.
5. Если некоторая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ A, содержит переменную x_i дважды, то одну переменную можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i\&x_i \equiv x_i$.

Ясно, что после выполнения описанной процедуры будет получена СДНФ A.

Например, для формулы $A \equiv x \vee y \& (x \vee \overline{y})$ ДНФ $A \equiv \equiv x \vee x\&y \vee y\&\overline{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $B \equiv x$, входящая в ДНФ A, не содержит переменной y, то, пользуясь равносильностью $B \equiv B\& (y \vee \overline{y}) \equiv x\& (y \vee \overline{y}) \equiv x\&y \vee x\&\overline{y}$, заменим ее на две элементарных конъюнкции $x\&y$ и $x\&\overline{y}$. В результате получим ДНФ $A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y} \vee x\&y \vee y\&\overline{y}$.

Так как теперь ДНФ A содержит две одинаковых элементарных конъюнкции $x\&y$, то лишнюю отбросим, пользуясь равносильностью $x\&y \vee x\&y \equiv x\&y$. В результате получим ДНФ $A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y} \vee y\&\overline{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $y\&\overline{y}$ содержит переменную y и ее отрицание $\overline{y}$, то $y\&\overline{y} \equiv 0$, и ее можно отбросить как нулевой член дизъюнкции.

Таким образом, получаем

$$\text{СДНФ } A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y}.$$

§ 11. КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (КНФ И СКНФ)

Определение 1. *Элементарной дизъюнкцией* n переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.

Элементарная дизъюнкция n переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \cdots \vee x_n^{\delta_n},$$

где $x_k^{\delta_k} = \begin{cases} x_k, & \text{если} \quad \delta_k = 1, \\ \overline{x}_k, & \text{если} \quad \delta_k = 0. \end{cases}$

Определение 2. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее КНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A \equiv \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \& y$ имеем:

$$A \equiv (\overline{x \vee y} \to x\&y) \,\&\, (x\&y \to \overline{x \vee y}) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee x\&y) \,\&\, \left(\overline{x\&y} \vee \overline{x \vee y}\right) \equiv$$
$$\equiv (x \vee x \vee y) \,\&\, (x \vee y \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x}) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{y})\,, \quad \text{то есть}$$
$$\text{КНФ } A \equiv (x \vee x \vee y) \,\&\, (x \vee y \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x}) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{y})\,.$$

Но так как $x \vee x \equiv x$, $y \vee y \equiv y$, $\overline{x} \vee \overline{x} \equiv \overline{x}$, $\overline{y} \vee \overline{y} \equiv \overline{y}$, то КНФ $A \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y}) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y})$.

А так как $(x \vee y) \,\&\, (x \vee y) \equiv (x \vee y)$, $(\overline{x} \vee \overline{y}) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y}) \equiv (\overline{x} \vee \overline{y})$, то КНФ $A \equiv (x \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y})$.

Определение 3. КНФ A называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* формулы A (СКНФ A), если для нее выполнены условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит переменную и ее отрицание.
4. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит двух одинаковых переменных.

Можно доказать, что каждая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

Один их способов получения СКНФ состоит в использовании таблицы истинности для формулы $\overline{A}$.

Действительно, получив с помощью таблицы истинности СДНФ $\overline{A}$, мы получим СКНФ A, взяв отрицание $\overline{\text{СДНФ } \overline{A}}$, то есть СКНФ $A \equiv \overline{\text{СДНФ } \overline{A}}$.

Другой способ получения СКНФ, использующий равносильные преобразования, состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из КНФ A.
2. Если в полученной КНФ A входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B \vee (x_i \& \overline{x}_i) \equiv B$, элементарную дизъюнкцию B заменяют на две элементарные дизъюнкции $B \vee x_i$ и $B \vee \overline{x}_i$, каждая из которых содержит переменную x_i.

3. Если в КНФ A входят две одинаковых элементарных дизъюнкции B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B\&B \equiv B$.

4. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i и ее отрицание, то $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$ и, следовательно, вся элементарная дизъюнкция имеет значение 1, а поэтому ее можно отбросить как единичный член конъюнкции.

5. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i дважды, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \vee x_i \equiv x_i$.

Ясно, что после описанной процедуры будет получена СКНФ A.

Например, для формулы $A \equiv x \vee \&(x \vee \overline{y})$ КНФ $A \equiv \equiv (x \vee y)\&(x \vee x \vee \overline{y})$.

Так как обе элементарные дизъюнкции различны и содержат все переменные (x и y), то первое и второе условия СКНФ A выполнены.

Элементарная дизъюнкция $x \vee x \vee \overline{y}$ содержит переменную x дважды, но $x \vee x \equiv x$, и поэтому КНФ $A \equiv (x \vee \overline{y})\&(x \vee y)$; причем ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит переменную и ее отрицание. Значит, теперь выполнены все условия СКНФ A, и, следовательно, СКНФ $A \equiv (x \vee \overline{y})\&(x \vee y)$.

§ 12. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные,

2) тождественно ложные и

3) выполнимые.

Определения тождественно истинной и тождественно ложной формул даны выше.

Формулу A называют *выполнимой*, если она принимает значение «истина» хотя бы на одном наборе значений входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

В связи с этим возникает задача: к какому классу относится данная формула?

Эта задача носит название *проблемы разрешимости*.

Очевидно, проблема разрешимости алгебры логики разрешима.

Действительно, для каждой формулы алгебры логики может быть записана таблица истинности, которая и даст ответ на поставленный вопрос.

Однако практическое использование таблицы истинности для формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при больших n затруднительно.

Существует другой способ, позволяющий, не используя таблицы истинности, определить, к какому классу относится формула A. Этот способ основан на приведении формулы к нормальной форме (КНФ или ДНФ) и использовании алгоритма, который позволяет определить, является ли данная формула тождественно истинной или не является. Одновременно с этим решается вопрос о том, будет ли формула A выполнимой.

Предположим, что мы имеем критерий тождественной истинности для формул алгебры логики. Рассмотрим механизм его применения.

Применим критерий тождественной истинности к формуле A. Если окажется, что формула A — тождественно истинная, то задача решена. Если же окажется, что формула A не тождественно истинная, то применим критерий тождественной истинности к формуле $\overline{A}$. Если окажется, что формула $\overline{A}$ — тождественно истинная, то ясно, что формула A — тождественно ложная, и задача решена. Если же формула $\overline{A}$ не тождественно истинная, то остается единственно возможный результат: формула A выполнима.

Установим теперь критерий тождественной истинности произвольной формулы алгебры логики. С этой целью предварительно сформулируем и докажем критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции.

Теорема 1. *Для того, чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть элементарная дизъюнкция тождественно истинна, но в нее одновременно не входит некоторая переменная и ее отрицание. Придадим каждой переменной, входящей в элементарную дизъюнкцию без знака отрицания, значение «ложь», а каждой переменной, входящей в элементарную дизъюнкцию под знаком отрицания — значение «истина». Тогда, очевидно, вся элементарная дизъюнкция примет значение «ложь», что противоречит условию.

Достаточность. Пусть теперь элементарная дизъюнкция содержит переменную и ее отрицание. Так как $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$, то и вся элементарная дизъюнкция будет тождественно истинной.

Критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции позволяет сформулировать и доказать критерий тождественной истинности произвольной формулы алгебры логики.

Теорема 2. *Для того, чтобы формула алгебры логики A была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержала переменную и ее отрицание.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A тождественно истинна. Тогда и КНФ A — тождественно истинна. Но КНФ $A \equiv A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$, где A_i — элементарные дизъюнкции $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как КНФ $A \equiv 1$, то $A_i \equiv 1\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. Но тогда по теореме 1 каждая элементарная дизъюнкция A_i содержит переменную и ее отрицание.

Достаточность. Пусть любая элементарная дизъюнкция A_i, входящая в КНФ A, содержит переменную и ее отрицание. Тогда по теореме 1 $A_i \equiv 1\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. При этом и КНФ $A \equiv 1$.

Например, выясним, является ли формула $A \equiv y \vee \overline{y} \& x \vee \overline{x} \& \overline{y}$ тождественно истинной.

Так как $A \equiv y \vee \overline{y} \& (x \vee \overline{x}) \equiv (y \vee \overline{y}) \& (y \vee x \vee \overline{x})$, то ясно, что каждая элементарная дизъюнкция $y \vee \overline{y}$ и $y \vee x \vee \overline{x}$, входящая в КНФ A, содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, $A \equiv 1$.

Аналогично можно установить критерий тождественной ложности формулы алгебры логики, используя ее ДНФ.

Теорема 3. *Для того, чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.*

Теорема 4. *Для того, чтобы формула алгебры логики A была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы любая конъюнкция, входящая в ДНФ A, содержала переменную и ее отрицание.*

§ 13. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. Приложения алгебры логики в технике (релейно-контактные схемы).

Среди технических средств автоматизации значительное место занимают устройства релейно-контактного действия. Они широко используются в технике автоматического управления, в электронно-вычислительной технике и т. д.

Эти устройства (их в общем случае называют переключательными схемами) содержат сотни реле, электронных ламп, полупроводников и электромагнитных элементов. Описание и конструирование таких схем в силу их громоздкости весьма затруднительно.

Еще в 1910 году физик П. С. Эренфест указал на возможность применения аппарата алгебры логики при исследовании релейно-контактных схем (РКС). Однако его идеи стали реализовываться значительно позже, когда создание общей теории конструирования РКС стало остро необходимым.

Использование алгебры логики в конструировании РКС оказалось возможным в связи с тем, что каждой схеме можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики, и каждая формула алгебры логики реализуется с помощью некоторой схемы.

Это обстоятельство позволяет выявить возможности заданной схемы, изучая соответствующую формулу, а упрощение схемы свести к упрощению формулы.

С другой стороны, до построения схемы можно заранее описать с помощью формулы те функции, которые схема должна выполнять.

Рассмотрим, как устанавливается связь между формулами алгебры логики и переключательными схемами.

Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из следующих элементов:

1) *переключателей*, которыми могут быть механические действующие устройства (выключатели, переключающие ключи, кнопочные устройства и т. д.), электромагнитные реле, электронные лампы, полупроводниковые элементы и т. п.;

2) соединяющих их *проводников*;

3) *входов* в схему и *выходов* из нее (клемм, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами схемы.

Сопротивления, конденсаторы и т. д. на схемах не изображаются.

Переключательной схемой принимается в расчет только два состояния каждого переключателя, которые называют «замкнутым» и «разомкнутым».

Рассмотрим простейшую схему, содержащую один переключатель P и имеющую один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание p, гласящее: «Переключатель P замкнут». Если p истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения. Будем в этом случае говорить, что схема проводит ток. Если p ложно, то переключатель разомкнут, и схема тока не проводит или на полюсе B снимается минимальное напряжение при подаче на полюс A максимального напряжения.

Если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема 1.

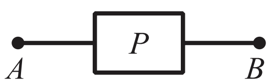

Схема 1.

Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Конъюнкция двух высказываний p и q будет представлена двухполюсной схемой с последовательным соединением двух переключателей P и Q (схема 2).