Лекция 2. Функциональные ряды.

Определение функционального ряда

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* ряда; если же ряд расходится – *точкой расходимости* функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x; $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) -$ частичная сумма ряда.

Для определения области сходимости функционального ряда часто используются признаки Даламбера и Коши. При этом поступают следующим образом.

1. Находим $l(x)$ по одной из формул (если пределы существуют)

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \text{ или } l(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}.$$

2. Так как по признаку Даламбера и Коши ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$, находим интервал сходимости, решая неравенство $l(x) < 1$.

3. Исследуем поведение ряда в граничных точках интервала сходимости.

Пример. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n(x^2-6x+10)^n}$.

Решение. Применяем признак Даламбера:

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)\left|x^2-6x+10\right|^{n+1}}}{\dfrac{2^n}{n\left|x^2-6x+10\right|^n}} = \frac{2}{\left|x^2-6x+10\right|}.$$

Находим интервал сходимости, решая неравенство $l(x) < 1$:

$$\frac{2}{\left|x^2-6x+10\right|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|x^2-6x+10\right| > 2.$$

Получаем $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

При $x = 2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (как гармонический);

при $x = 4$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ также расходится. Следовательно, область сходимости ряда - $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$.

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т.е. так называемый *степенной ряд*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ называются коэффициентами ряда, $x \in R$ - действительная переменная.

Ряд (1) разложен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, разложенный по степеням $(x - x_0)$, т.е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots a_n (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (2)$$

где x_0 – постоянное число.

Ряд (2) легко приводиться к виду (1), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничится степенными рядами вида (1).

Сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда (1) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (2) сходится в точке $x = x_0$).

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 1. (*Абель*)**.** Если степенной ряд (1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию теоремы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т.е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $\left| a_n x_0^n \right| \leq M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ и, следовательно,

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le M \cdot q^n,\ n = 0,1,2,\dots,$$

т.е. модуль каждого члена ряда (1) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (1) абсолютно сходится.

Следствие теоремы 1. Если ряд (1) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \ne 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда, при этом можно подобрать x_0 таким, что при всех значениях x вне этого интервала ряд расходится.

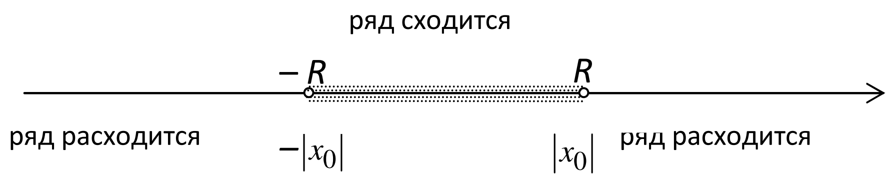

Рисунок 1.

Интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ и называют *интервалом сходимости* степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда, т.е. $R > 0$ - это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд сходится при всех значениях $x \in R$ (т.е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т.е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \dots + \left|a_n x^n\right| + \dots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ne 0, x \ne 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т.е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда, расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда радиус абсолютной сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{4}$$

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0,$ то можно убедиться, что ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы), а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле (3):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при при $-2 < x+2 < 2,$ т.е. при $-4 < x < 0.$

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полузамкнутый интервал $[-4;0)$

Равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства степенных рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в области D, если в этой области последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ равномерно сходится к своей предельной функции $S(x)$, то есть: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $n_0 \in N$ такое, что при всех $n > n_0$ и любого $p \in N$ имеет место неравенство $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ при всех x из D. (Критерий Коши).

Теорема 2. (*признак Вейерштрасса равномерной сходимости*). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет место неравенство $|u_n(x)| \le c_n$ при всех x из D и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в D равномерно.

Доказательство. Так как числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N, \forall p \ge 0 \left|c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}\right| = c_{n+1}+\ldots+c_{n+p} < \varepsilon$ (ряд знакоположителен, $c_k > 0$).

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall x \in V, \forall n > N, \forall p \ge 0$

$$\left|u_{n+1}(x)+\ldots u_{n+p}(x)\right| < \left|u_{n+1}(x)\right|+\ldots\left|u_{n+p}(x)\right| < c_{n+1}+\ldots+c_{n+p} < \varepsilon .$$

Следовательно, выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области D равномерно.

Пример. Ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно в R, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходящийся числовой ряд.

Замечание. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всегда равномерно сходится в области $(-R;R)$.

Из равномерной сходимости степенного ряда внутри своего интервала сходимости вытекают следующие свойства степенных рядов, которые мы сформулируем без доказательства.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом выполняется равенство

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n dt + \ldots$$

при $-R < a < x < R$.

Оба ряда, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.