ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

Криволинейный интеграл второго рода. Формула Грина

Если гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ являются непрерывными на L, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \tag{1}$$

Если кривая L задана уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))'z(t)]dt. \tag{2}$$

Если кривая L задана уравнением $y = y(x), a \le x \le b$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx. \tag{3}$$

Одним из физических приложений криволинейного интеграла 2-го рода является работа A силы $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ при перемещении материальной точки единичной массы из точки A в точку B вдоль дуги AB:

$$A = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{4}$$

Если кривая L замкнута, то криволинейный интеграл второго рода называется *циркуляцией* и обозначается

$$C = \oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ и их частные производные являются непрерывными в простой области G с положительно ориентированной границей L, тогда справедлива *формула Грина*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

С помощью этой формулы можно вычислить площадь плоской области G. Действительно, полагая в формуле $P = 0, Q = x$, найдем $S = \iint_G dxdy = \oint_L xdy$.

Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} (xy-1)dx + x^2 ydy$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$ по прямой $y = 2 - 2x$.

Решение. Данный интеграл вычислим по формуле (3):

$$\int_{AB} (xy-1)dx + x^2 ydy = \int_1^0 (x(2-2x)-1)dx + x^2(2-2x)d(2-2x) =$$

$$= \int_1^0 (2x - 2x^2 - 1 - 2x^2(2-2x))dx = \int_1^0 (2x - 2x^2 - 1 - 4x^2 + 4x^3)dx = \int_1^0 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)dx =$$

$$= (x^4 - 2x^3 + x^2 - x)\Big|_1^0 = 1 .$$

Ответ: 1.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{ABC} 2xydx + x^2 dy$ по ломаной ABC, где $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$.

Решение. Используя свойство аддитивности интеграла, получим

$$\int_{ABC} 2xydx + x^2 dy = \int_{AB} 2xydx + x^2 dy + \int_{BC} 2xydx + x^2 dy .$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, имеет вид $y = x$, где $x \in [0,1]$. Поэтому

$$\int_{AB} 2xydx + x^2 dy = \int_0^1 (2x^2 + x^2)dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 .$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $B(1,1)$ и $C(1,0)$, имеет вид $x = 1$, где $y \in [1,0]$. Тогда

$$\int_{BC} 2xydx + x^2dy = \int_1^0 2yd(1) + dy = \int_1^0 dy = y\Big|_1^0 = -1.$$

Таким образом, $\int_{ABC} 2xydx + x^2dy = 1 + (-1) = 0$.

Ответ: 0.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (4x - y)dx + xdy$ по кривой $L: y = x^3, 0 \le x \le 1$.

Решение. По формуле (3) найдем

$$\int_L (4x - y)dx + xdy = \int_L (4x - x^3)dx + xdx^3 = \int_0^1 (4x - x^3 + 3x^3)dx = \int_0^1 (4x + 2x^3)dx =$$

$$= (4\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = 2 + 1/2 = 5/2.$$

Ответ: $5/2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L ydx - xdy$ по кривой $L: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ с положительным направлением обхода.

Решение. Заданная кривая является эллипсом, запишем параметрические уравнения: $x = \cos t,\ y = 2\sin t, t \in [0, 2\pi]$. Тогда по формуле (1) найдем

$$\int_L ydx - xdy = \int_L 2\sin td(\cos t) - \cos td(2\sin t) = \int_0^{2\pi} -2\sin^2 tdt - 2\cos^2 tdt =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt == -2\int_0^{2\pi} dt = -2t\Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Ответ: -4π.

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$ по астроиде $L: x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$.

Решение. Найдем значения параметра *t*, соответствующие точкам *A* и *B*. Для этого в уравнение кривой $L: x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ вначале подставим вместо *x* и *y* координаты точки *A*: $\cos^3 t = 1, \sin^3 t = 0$, отсюда $t = 0$. Теперь подставим координаты точки *B*: $\cos^3 t = 0, \sin^3 t = 1$, отсюда $t = \pi/2$. Таким образом $t \in [0, \pi/2]$.

Для вычисления интеграла используем формулу (1), получим

$$\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}} = \int_L \frac{\cos^6 td(\sin^3 t) - \sin^6 td(\cos^3 t)}{\cos x^5 t + \sin^5 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos^6 t\sin^2 t\cos t + 3\sin^6 t\cos^2 t\sin t}{\cos x^5 t + \sin^5 t} dt = 3\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^5 t + \sin^5 t)}{\cos x^5 t + \sin^5 t} dt =$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\sin^2 tdt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2tdt = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} dt - \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \cos 4tdt =$$

$$= \frac{3}{8}(t - \frac{\sin 4t}{4})\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8\cdot 2} = \frac{3\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{16}$.

6. Найти работу силы $F = (y^2 - z^2)\cdot i + 2yz\cdot j - x^2\cdot k$ при перемещение материальной точки по кривой $L: x = t,\ y = t^2, z = t^3$ от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(1,1,1)$.

Решение. Подставив в уравнения кривой вместо *x*, *y*, *z* координаты точки $A(0,0,0)$, получим $t = 0, t^2 = 0, t^3 = 0$, отсюда $t = 0$. Аналогично, подставив координаты точки $B(1,1,1)$, найдем $t = 1, t^2 = 1, t^3 = 1$, отсюда $t = 1$. По формуле (4) найдем

$$A = \int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz = \int_L (t^4 - t^6)dt + 2t^2t^3dt^2 - t^2dt^3 = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4)dt =$$

$$= \int_0^1 (-2t^4 + 3t^6)dt = (-2\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^7}{7})\Big|_0^1 = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-14+15}{35} = \frac{1}{35}.$$

Ответ: $\frac{1}{35}$.

7. Найти работу силы **F** при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*, если

$\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$; $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \ge 0$; $M(3, 0)$; $N(-3, 0)$.

Решение. Работа выражается криволинейным интегралом второго рода:

$$A = \int_L \mathbf{Fdr} = \int_L \left(x^2 - y^2\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy.$$

Используя параметрическое представление эллипса *L*:

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$

сведём криволинейный интеграл к определённому интегралу:

$$A=\int_0^{\pi}\left[-\left(9\cos^2 t-4\sin^2 t\right)\cdot 3\sin t+\left(9\cos^2 t+4\sin^2 t\right)\cdot 2\cos t\right]dt=-82/3.$$

Ответ: $A=-82/3$.

8. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ по окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ в положительном направлении.

Решение. По определению циркуляции получаем

$$C=\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=\oint_C -ydx+xdy=\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)dt=2\pi a^2..$$

Ответ: $C=2\pi a^2$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F}=yi-xj+zk$ вдоль кривой $L: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z\ge 0$.

Решение. Кривая является линией пересечения сферы и конуса. В сечение получается окружность. Подставив $x^2+y^2=z^2$ в уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=4$, получим $2z^2=4,\ z=\pm\sqrt{2}$. Так как по условию задачи $z\ge 0$, то берем значение $z=\sqrt{2}$. Тогда уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=2$. Поэтому параметрические уравнения кривой L следующие: $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\ z=\sqrt{2},\ 0\le t\le 2\pi$. Вычисляем циркуляцию по формуле (5):

$$\int_L ydx-xdy+zdz=\int_L \sqrt{2}\sin t d(\sqrt{2}\cos t)-\sqrt{2}\cos t d(\sqrt{2}\sin t)+\sqrt{2}d(\sqrt{2})=$$

$$=2\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t)dt=-2t\Big|_0^{2\pi}=-4\pi.$$

Ответ: $C=-4\pi$.

10. Найти площадь плоской области, ограниченной кардиоидой $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t$.

Решение. Воспользуемся формулой $S=\iint_G dxdy=\oint_L xdy$. Получим

$$S=\oint_L xdy=\oint_L(2\cos t-\cos 2t)d(2\sin t-\sin 2t)=\int_0^{2\pi}(2\cos t-\cos 2t)(2\cos t-2\cos 2t)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(4\cos^2 t-6\cos t\cos 2t+2\cos^2 2t)dt=\int_0^{2\pi}(2+2\cos 2t-3\cos t-3\cos 3t+1+\cos 4t)dt=$$

$$=(2t+\sin 2t-3\sin t-\sin 3t+t+\sin 4t/4)\Big|_0^{2\pi}=6\pi.$$

Ответ: 6π **.**

11. Вычислить интеграл $\oint\limits_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$ по контуру треугольника с вершинами $A(2{,}0)$, $B(2{,}2)$, $C(0{,}2)$ с помощью формулы Грина.

Решение. Сопоставив наш интеграл с формулой Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,,$$

определим, что $P(x,y) = y^2, Q(x,y) = (x+y)^2$. Отсюда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) - 2y = 2x$. Тогда

$$\oint\limits_L y^2 dx + (x+y)^2 dy = \iint\limits_G 2x dxdy = 2\int\limits_0^2 x dx \int\limits_{2-x}^2 dy = \int\limits_0^2 x^2 dx = (x^3/3)\Big|_0^2 = 8/3$$

Ответ: 8/3.