ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

Вычисление характеристик скалярных и векторных полей

Если каждой точке M области V соответствует определенное число $U = U(M)$, то говорят, что в области задано *скалярное поле*.

Если V – область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M): $U = U(x, y, z)$.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т.е. $U(x, y, z) = C$.

В случае плоского поля $U = U(x, y)$ равенство $U(x, y) = C$ представляет собой уравнение *линии уровня*, т.е. линия уровня – это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$, называют *градиентом функции* и обозначают $\mathrm{grad}\,U$, т.е. $\mathrm{grad}\,U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$, или

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Производная скалярного поля $U(x, y, z)$ по направлению l, заданному вектором

$$l = ai + bj + ck$$

вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{a}{|l|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|l|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|l|}, \quad |l| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Между производной поля $U(x, y, z)$ по направлению l и его градиентом в данной точке M существует следующая связь:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = e \cdot \mathrm{grad}\,U = \mathrm{Пр}_e \mathrm{grad}\,U,$$

где e - единичный вектор направления l. Из определения градиента непосредственно следует, что

$$\max \frac{\partial U}{\partial l} = |\mathrm{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} .$$

Говорят, что в некоторой области пространства задано *векторное поле* $\vec{a}(M)$, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области сопоставлен вектор

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} .$$

Векторной линией поля $\vec{a}(M)$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$.

Векторные линии поля описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Примеры решения задач

1. Найти линии уровня следующих плоских скалярных полей:

а) $U = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$; б) $U = xy$.

Решение.

а) Линии уровня определяются уравнением

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C .$$

Из уравнения следует, что постоянная C должна быть неотрицательной, т.е. $C \geq 0$. При $C = 0$ линия уровня вырождается в точку $O(0, 0)$. При $C > 0$ получаем семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{4C} + \frac{y^2}{9C} = 1$$

с полуосями $a = 2\sqrt{C}$, $в = 3\sqrt{C}$, изображенных на рис. 1. Чем больше значение постоянной C, тем больше полуоси эллипса.

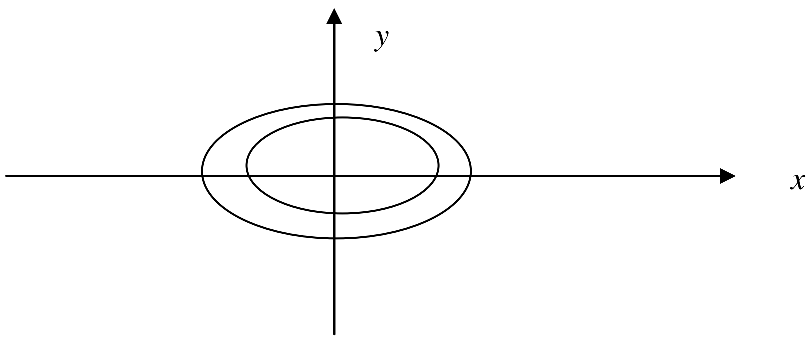

Рис. 1

б) Линии уровня определяются уравнением $xy = C$. Здесь постоянная C может иметь любой знак и может обращаться в нуль. При $C = 0$ получаем прямые $x = 0$ и $y = 0$, т.е. оси координат. При $C > 0$ – это семейство гипербол в первой и третьей четверти, а при $C < 0$ – это семейство гипербол во второй и четвертой четверти (рис. 2).

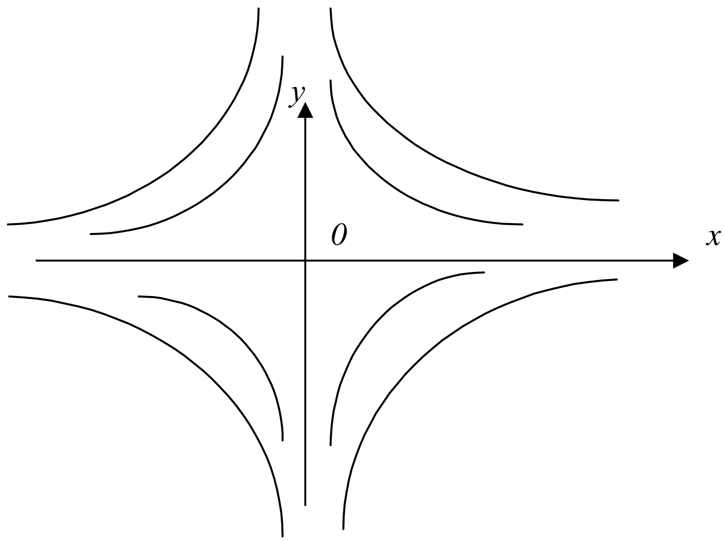

Рис. 2

2. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. Семейство поверхностей уровня скалярного поля определяется уравнением

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C,$$

которое описывает семейство концентрических сфер с центром в начале координат.

3. Плоское поле задано скалярной функцией $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Найти проекции градиента в точке $M(1; 2)$.

Решение. Градиент скалярного поля на плоскости имеет вид

$$\text{grad}\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Найдем частные производные в точке M:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x - 2y\Big|_{(1;2)} = -2, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2x + 3\Big|_{(1;2)} = 1.$$

Отсюда

$$\text{grad}\ \psi\Big|_{(1;2)} = \{-2;1\}.$$

Ответ: $\text{grad}\ \psi\Big|_{(1;2)} = \{-2;1\}$.

4. Найти величину и направление градиента скалярного поля $u(x, y, z) = xy - z^2$ в точке M (-9, 12, 10). Определить производную в направлении биссектрисы координатного угла xOy.

Решение. Используя определение градиента, получаем

$$\text{grad}\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} = \{y, x, -2z\}.$$

Вычислим градиент в точке M:

$$\text{grad}\ u(M) = \{12, -9, -20\}.$$

Величина градиента – это модуль полученного вектора:

$$|\text{grad}\, u(M)| = \sqrt{12^2 + (-9)^2 + \left(-20^2\right)} = 25.$$

Направление градиента определяется направляющими косинусами:

$$l = \frac{\text{grad}\, u(M)}{|\text{grad}\ u(M)|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}\right\}.$$

Единичный вектор e**,** исходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид:

$$e = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}.$$

Производная по направлению равна скалярному произведению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u(M) \cdot e = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $|\text{grad}\, u(M)| = 25,\ l = \left\{\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}\right\},\ \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$

5. Дана функция $u(M) = e^{x^2 - 2y^2 + 3z}$ и точки $M_1(1,\ 1,\ 0),\ M_2(2,\ 3,\ 2)$. Вычислить:

1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

2) $\text{grad}\, u(M_1)$.

Решение. Находим частные производные функции $u(x, y, z)$, используя правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2 - 2y^2 + 3z},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -4y \cdot e^{x^2 - 2y^2 + 3z},\ \frac{\partial u}{\partial z} = 3 \cdot e^{x^2 - 2y^2 + 3z}.$$

Вычисляем значения найденных частных производных в точке M_1, подставим вместо x, y, z координаты точки M_1

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = u'_x(1,\ 1,\ 0) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2 - 2\cdot1^2 + 3\cdot0} = \frac{2}{e},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = u'_y(1,\ 1,\ 0) = -4 \cdot 1 \cdot e^{1^2 - 2\cdot1^2 + 3\cdot0} = -\frac{4}{e},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = u'_z(1,\ 1,\ 0) = 3 \cdot e^{1^2 - 2\cdot1^2 + 3\cdot0} = \frac{3}{e}.$$

Определяем вектор $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M_2} = (2-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Находим модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,\ \cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Определяем искомую производную поля $u(M) = u(x,\ y,\ z)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}}\right|_{M_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta=\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{e}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{e}\cdot\frac{2}{3}=0\,.$$

2) Вычислим $\operatorname{grad} u\left(M_1\right)$:

$$\operatorname{grad} u(M_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\vec{k}=\frac{1}{e}(2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k})\,.$$

Ответ: а) $\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}}\right|_{M_1}=0$; б) $\operatorname{grad} u(M_1)=\frac{1}{e}(2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k})$.

6. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a}=3x\vec{i}+6y\vec{j}$.

Решение. Так как третья координата векторного поля $R(x,y,z)=0$, то $dz=0$ и, следовательно, $z=C=\mathrm{const}$. Поэтому дифференциальные уравнения векторных линий сводятся к одному уравнению:

$$\frac{dx}{3x}=\frac{dy}{6y}\ \text{при}\ z=C.$$

Решаем дифференциальное уравнение, получим

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}+\ln C_1\Rightarrow\ln y=2\ln x+\ln C_1\Rightarrow y=C_1x^2\,.$$

Следовательно, векторные линии определяются системой уравнений

$$\begin{cases} y=C_1x^2,\\ z=C_2.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y=C_1x^2,\\ z=C_2.\end{cases}$

7. Найти векторную линию векторного поля $\overline{a}(M)=-yi+xj+bk$, проходящую через точку $M_0(1,0,0)$. Здесь b – число.

Решение. Составляем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}.$$

Решаем ее:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x},\quad xdx+ydy=0,\quad x^2+y^2=C_1^2$$

или, в параметрическом виде, $x=C_1\cos t,\quad y=C_1\sin t;$

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b},\quad \frac{dz}{b}=\frac{C_1\cos t dt}{C_1\cos t},\quad dz=bdt,\quad z=bt+C_2.$$

Так как векторная линия должна проходить через точку $M_0(1,0,0)$, то легко находим, что постоянные интегрирования $C_1=1$, $C_2=0$. Уравнения векторной линии векторного поля имеют вид

$$x=\cos t,\ y=\sin t;z=bt \quad \text{(винтовая линия).}$$

Ответ: $x=\cos t,\ y=\sin t;z=bt.$