ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Сходимость знакопеременных числовых рядов

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором имеется бесконечно много как положительных, так и отрицательных элементов, называется *числовым рядом с произвольными членами*.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, в то время как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Числовой ряд, знаки которого чередуются,

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

называется *знакопеременным, или знакочередующимся*.

Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Признак Лейбница. Если последовательность $\{u_n\}$ положительна, монотонно убывает и стремится к нулю, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится.

Признак Абеля. Пусть задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Предположим, что

1) числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена;

2) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Примеры решения задач

1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right).$$

Решение. Проверяем выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)=0 .$$

Необходимый признак сходимости выполняется. Далее исследуем сходимость ряда, составленного из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right).$$

Так как при $n\to\infty$

$$n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)\sim\frac{\pi}{\sqrt{n}},$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ расходится (обобщенный гармонический ряд при $\alpha=1/2<1$), то по предельной теореме сравнения ряд из модулей расходится.

Проверяем условия признака Лейбница:

а) ряд знакочередующийся с $u_n = n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)$;

б) члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$u_{n+1}=(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right)<u_n=n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)\quad \forall n\geq 1;$$

в) члены ряда u_n стремятся к нулю при $n\to\infty$ (см. выше).

Следовательно, по признаку Лейбница исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится условно.

2. Исследовать на сходимость ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$

Решение. Ряд, составленный из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$ можно сравнить с (расходящимся) гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. В самом деле, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}=1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$ расходится, а исходный ряд абсолютно не сходится. Исследуем его на условную сходимость. Это можно сделать с помощью признака Лейбница:

1) ряд знакочередующийся;

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}=0$;

3) $\frac{n+1}{n^2+n+1}>\frac{n+2}{(n+1)^2+(n+1)+1}$ для любого n, так как

$$\frac{n+1}{n^2+n+1}-\frac{n+2}{(n+1)^2+(n+1)+1}=\frac{n+1}{n^2+n+1}-\frac{n+2}{n^2+3n+3}=\frac{n^2+3n+1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2+3n+3\right)}>0.$$

Ответ: ряд сходится условно.

3. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots$$

Решение. Покажем, что члены этого ряда по абсолютной величине монотонно убывают. В самом деле, неравенство

$$\frac{n}{6n-5}>\frac{n+1}{6(n+1)-5}$$

при $n\geq 1$ эквивалентно неравенству $6n^2+n>6n^2+n-5$, которое выполняется при всех значениях $n\geq 1$. Однако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\frac{1}{6}\neq 0$$

Ответ: ряд расходится.

4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}+\ldots$$

Решение. Исследуем, сходится ли заданный ряд абсолютно, т. е. исследуем на сходимость ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\ldots+\frac{n^3}{2^n}+\ldots$$

По признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 2^n}{n^3 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^3}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Так как предел отношения последующего члена к предыдущему меньше единицы, то ряд, взятый по модулю, сходится. Отсюда вытекает, что данный ряд также сходится, и притом абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

5. Исследовать на сходимость числовые ряды с произвольными членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n+5}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{tg\,\frac{a}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[5]{10n-3}}$, где a - произвольное число,

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{sh\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{3n^3+2n+10}}$.

Решение.

а) Исследуем заданный ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, состоящий из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{3^n+5}\right|$, и применим к нему признак сравнения. В качестве ряда сравнения рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, состоящий из элементов сходящейся геометрической прогрессии. Причем для каждого члена выполняется неравенство $u_n<\frac{1}{3^n}$. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд абсолютно сходится.

б) Исследуем заданный ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, состоящий из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right|$, и применим к нему признак сравнения. В качестве ряда сравнения рассмотрим расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, и заметим, что для каждого члена выполняется неравенство $u_n>\frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд не сходится абсолютно. Проверим условную сходимость. Данный ряд является знакочередующимся, причем выполнены все условия признака Лейбница: $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$. Поэтому данный ряд сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

в) Для данного ряда не выполнено необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ не существует. Поэтому ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

г) Применим признак Абеля, взяв в качестве $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt[5]{10n-3}}\right\}$, $\{b_n\}=\left\{(-1)^{n-1}tg\frac{a}{\sqrt[3]{n}}\right\}$. Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}tg\frac{a}{\sqrt[3]{n}}$ следует из признака Лейбница. Поэтому выполнены все условия признака Абеля.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

д) Исследуем заданный ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, состоящий из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{3n^3+2n+10}}$, и применим к нему признак сравнения. В качестве ряда сравнения рассмотрим расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, и заметим, что для каждого члена выполняется неравенство $|u_n|>\frac{1}{n^2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sh\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{3n^3+2n+10}}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{sh\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}}{\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{n^2}{\sqrt{3n^3+2n+10}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, ряд из модулей сходится.

Ответ: ряд сходится абсолютно.