Практическое занятие 7

Ряды Фурье для функций любого периода и для непериодических функций

Ряд Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l;l)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}&a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx\quad n=1,2,...\\&b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(1)$$

Заметим, что промежуток [-*l*, *l*] может быть заменен любым другим промежутком длины $2l$, к примеру, промежутком [0, 2*l*], тогда

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=0,1,2,...);\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=1,2,...).$$

Для четной функции произвольного периода $T=2l$ разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned}&f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x;\\&a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(2)$$

Для нечетной функции:

$$\begin{aligned}&f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x;\\&b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(3)$$

Если функция $f(x)$ задана на интервале (0, *l*), то для разложения в ряд Фурье функцию надо доопределить на интервале (-*l*, 0) произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье на интервале $\left(-l;l\right)$. Доопределять функцию можно четным или нечетным способом, т. е. чтобы значения функции в точках интервала (-*l*, 0) находились из условия $f\left(-x\right)=f(x)$ или $f\left(-x\right)=-f(x)$.

Примеры решения задач

1. Для данной периодической функции построить ряд Фурье.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0;\\ x, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

Решение. Ряд Фурье для заданной периодической функции с периодом $T=2l=4$ ищем в виде:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{2}x+b_n\sin\frac{\pi n}{2}x\right).$$

Вычисляем коэффициенты ряда по формуле (1)

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xdx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\left.\frac{2}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx, & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(-\left.\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом, разложение заданной функции $f(x)$ ряд Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}.$$

Согласно теореме Дирихле значение функции на конце интервала $(-2;2)$ вычисляем по формуле:

$$f(2)=\frac{f(2-0)+f(2+0)}{2}=\frac{2+0}{2}=1.$$

Отметим, что график функции $f(x)$ имеет вид (рис. 1)

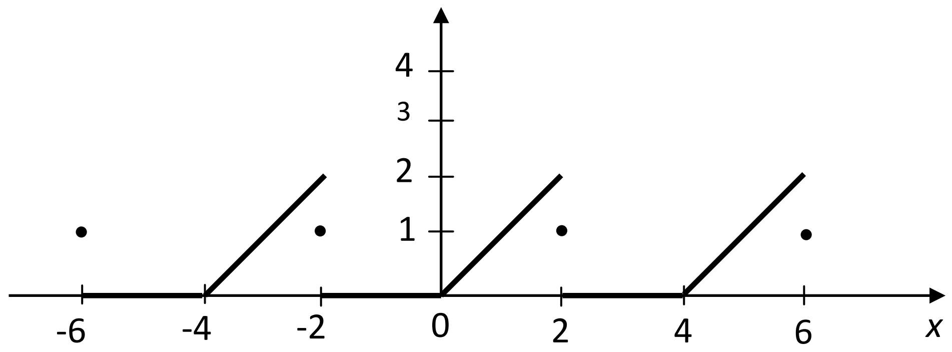

Рис. 1

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}.$

2. Разложить функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье в интервале $(-2,2)$.

Решение. Данная функция нечетная в интервале $(-2,\ 2)$, поэтому ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где по формуле (3)

$$b_n=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2x}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(2\cos n\pi-0\right)+\frac{2^2}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{4}{n\pi}-\left(-1\right)^n+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi-\sin 0\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}\ \Rightarrow\ b_n=\frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}.$$

Отсюда,

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Ответ: $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}.$

3. Разложить функцию $f\left(x\right)=\cos 2x$ в ряд Фурье в интервале $(0,\pi)$.

Решение. Доопределим данную функцию на интервале $(-\pi,0)$ нечетным образом. Тогда используем формулу (3), где $l=\pi$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\cdot\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(nx+2x)+\sin(nx-2x))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x(n+2)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x(n-2)dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos x(n+2)}{n+2}-\frac{\cos x(n-2)}{n-2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\pi(n+2)}{n+2}-\frac{\cos\pi(n-2)}{n-2}\right)-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{(-1)^n}{n-2}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n-2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n+2}+\frac{1-(-1)^n}{n-2}\right).$$

Далее видно, что

1) при $n=2k,\ k=0,1,2,\ldots$коэффициенты $b_n=b_{2k}=0$,
2) при $n=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots$ коэффициенты $b_n=b_{2k+1}$ равны

$$b_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+1+2}+\frac{2}{2k+1-2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+3}+\frac{2}{2k-1}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}.$$

Следовательно, ряд Фурье для рассматриваемой функции запишется в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)x=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}\cdot.\sin(2k+1)x.$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}\cdot.\sin(2k+1)x.$