ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

Криволинейный интеграл первого рода, его приложения

Если гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, и функция $f(x,y)$ является непрерывной на L, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (1)$$

Отметим, что если кривая L задана в трехмерном пространстве уравнениями $L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то формула (1) запишется в виде

$$\int_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \qquad (2)$$

Если кривая L задана уравнением $y = y(x),\ a \le x \le b$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (3)$$

Если кривая L задана на плоскости полярным уравнением $L: r = r(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (4)$$

Приведем *основные свойства криволинейного интеграла I рода*:

1) $\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl$;

2) $\int_L c \cdot f(x, y)dl = c \cdot \int_L f(x, y)dl,\ c = \text{const}$;

3) $\int_L (f_1(x, y) \pm f_2(x, y))dl = \int_L f_1(x, y)dl \pm \int_L f_2(x, y)dl$;

4) $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl$, где $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

Приведем некоторые *приложения данного интеграла*:

1) $\int\limits_{AB} dl = l$, где l- длина дуги AB;

2) если функция $f(P)$ является линейной плотностью кривой L, то криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_L f(P)dl$ равен массе этой кривой;

3) координаты центра тяжести кривой вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m}, \tag{5}$$

где m- масса кривой.

Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (4x^2 - 3\sqrt{y})dl$ от точки $A(-1,0)$ до точки $B(0,1)$ по прямой.

Решение. Напомним, что уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Составим уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A(-1,0)$ и $B(0,1)$:

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-0}{1-0}, \text{ или } y = x + 1.$$

Исходный криволинейный интеграл вычислим по формуле (3), то есть

$$\int\limits_{AB} (4x^2 - 3\sqrt{y})dl = \int\limits_{-1}^{0} (4x^2 - 3\sqrt{x+1})\sqrt{1+1^2}\,dx = 4\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0} x^2 dx - 3\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\,d(x+1) =$$

$$= 4\sqrt{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} - 3\sqrt{2}\,\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$ по кривой $L: x = t\cos t - \sin t,\ y = t\sin t + \cos t,\ z = t^2,\ t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Данная кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями, поэтому используем формулу (2). Для этого предварительно вычислим

$$x'_t = -t\sin t,\ y'_t = t\cos t,\ z'_t = 2t\,,$$

отсюда $dl = \sqrt{(t\sin t)^2 + (t\cos t)^2 + (2t)^2}\,dt = \sqrt{5}tdt$. Тогда

$$\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl = \sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi}\left((t\cos t - \sin t)^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + t^4\right)dt = \sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi}(1 + t^2 + t^4)tdt =$$

$$= \sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi}(t + t^3 + t^5)dt = \sqrt{5}(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6})\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{5}(2\pi^2 + 4\pi^4 + \frac{32}{3}\pi^6)$$

Ответ: $\sqrt{5}(2\pi^2 + 4\pi^4 + \frac{32}{3}\pi^6)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$ по кривой $L: x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Данная кривая является окружностью. Перейдя к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, определим $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 2r\cos\varphi$, отсюда $r = 2\cos\varphi, r = o$. При $r = o$ найдем $\cos\varphi = 0$, тогда $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. По формуле (4) получим

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = 4\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8\,.$$

Ответ: 8.

4. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода.

а) $\int\limits_L \sqrt{y}dl,\quad L -$ часть параболы $y = x^2$ от т. $A(0, 0)$ до т. $B(2, 4)$;

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, L – часть кривой $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t\ (0 \le t \le 2\pi)$ (первый виток винтовой линии);

в) $\int\limits_L |y|dl,\ L$ – лемниската Бернулли $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение.

а) Поскольку кривая интегрирования L задана в явном виде, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (3)

$$\int_L \sqrt{y}dl = \int_0^2 \sqrt{x^2}\sqrt{1+((x^2)')^2}dx = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

б) Поскольку кривая интегрирования L пространственная и задана в параметрическом виде, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (2). Предварительно вычисляем: $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t,\ z'(t) = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + 4t^2 = 1 + 4t^2$. Подставляем эти результаты в формулу (2) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int_L (x^2+y^2+z^2)dl = \int_0^{2\pi}(4t^2+1)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+4}dt = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}(4t^2+1)dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{4t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{5}\left(\frac{32\pi^3}{3}+2\pi\right).$$

в) Поскольку кривая интегрирования L задана в полярных координатах, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (4). Предварительно вычисляем: $\rho'(\varphi) = -\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $|y| = |\rho(\varphi)\sin\varphi| = |\sin\varphi|\sqrt{\cos 2\varphi}$. Так как в уравнении кривой интегрирования должно выполняться условие $\cos 2\varphi \ge 0$, то $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Подставляем эти результаты в формулу (4) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int_L |y|dl = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin\varphi|\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt{(\sqrt{\cos 2\varphi})^2 + \left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}|\sin\varphi|d\varphi = 2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi = -2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2-\sqrt{2}.$$

Ответ: а) $\dfrac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)$; б) $\sqrt{5}\left(\dfrac{32\pi^3}{3}+2\pi\right)$; в) $2-\sqrt{2}$.

5. Найти массу кривой $L: y = \ln x,\ x \in [1, e]$, если линейная плотность в каждой точке равна $\rho(x, y) = kx^2,\ k - const$.

Решение. Для вычисления массы используем формулу $m = \int\limits_L \rho(x, y)dl$. Получим

$$m = \int\limits_L kx^2 dl = k\int\limits_1^e x^2\sqrt{1 + (\ln x)'^2}dx = k\int\limits_1^e x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = k\int\limits_1^e x^2\,\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}dx =$$

$$= k\int\limits_1^e x\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{k}{2}\int\limits_1^e \sqrt{1 + x^2}\,d(1 + x^2) = \frac{k}{2}\,\frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_1^e = \frac{k}{3}\left((1 + e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\frac{k}{3}\left((1 + e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right)$.

6. Вычислить массу m и координаты центра масс x_C, y_C плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$, линейная плотность которой $\gamma(x, y) = y \cdot \sqrt{1+x}$.

Решение. Найдем массу:

$$m = \int\limits_0^1 \gamma(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{16}{35}.$$

Тогда, по формулам (5) определим

$$x_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 (x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}})dx = \frac{10}{9},$$

$$y_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{35}{24}\int\limits_0^1 (x^3 + x^4)dx = \frac{21}{32}.$$

Ответ: $m = \frac{16}{35}$, $x_C = \frac{10}{9}$, $y_C = \frac{21}{32}$.