## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 20

### Вычисление ротора векторного поля. Формула Стокса

Криволинейный интеграл по замкнутому $L$ от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\overline{dr}$, касательный к контуру $L$, называется *циркуляцией* вектора $\vec{a}$ вдоль $L$, т.е.

$$C = \oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r}\ . \tag{1}$$

Циркуляция $C$, записанная в этом виде имеет простой *физический смысл*: *если кривая* $L$ *расположена в силовом поле, то циркуляция – это работа силы* $\vec{a}(M)$ *поля при перемещении материальной точки вдоль* $L$.

**Теорема 1.** Пусть $\Sigma$ - вполне проектируемая ориентированная и кусочно-гладкая поверхность, $\Gamma^+$ - ее кусочно-гладкая граница, функции $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках поверхности $\Sigma$. Пусть вектор $\vec{n}_0(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \cos\beta(M)\vec{j} + \cos\gamma(M)\vec{k}$ является единичным вектором нормали к выбранной стороне поверхности. Тогда справедлива формула

$$\int_{\Gamma^+} P(M)\mathrm{d}x + Q(M)\mathrm{d}y + R(M)\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \Big[\big(R'_y - Q'_z\big)\cos\alpha - \big(R'_x - P'_z\big)\cos\beta + \big(Q'_x - P'_y\big)\cos\gamma\Big]\Big|_M \mathrm{d}\sigma\ , \tag{2}$$

которая называется формулой Стокса.

*Ротором* (или вихрем) *векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ и определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{3}$$

Эту формулу можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Используя понятия ротора и циркуляции векторного поля, запишем формулу Стокса в другом виде. Левая часть формулы Стокса представляет собой циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру $L$. Интеграл в правой части формулы Стокса представляет собой поток вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность $S$, ограниченную контуром $L$, т.е.

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS .$$

Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$C=\oint_L \bar{a}\cdot d\bar{r}=\iint_S (\operatorname{rot}\bar{a}\cdot n)dS . \qquad (4)$$

Такое представление формулы Стокса называют ее *векторной формой*. Эта формула показывает, что *циркуляция вектора* $\vec{a}$ *вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора* $\vec{a}$ *через поверхность S, лежащую в поле вектора* $\vec{a}$ *и ограниченную контуром L* (натянутую на контур $L$).

### ***Примеры решения задач***

**1.** Найти циркуляцию векторного поля **a** вдоль контура $L$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра $t$).

$$\vec{a}=4y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}, \quad L:\begin{cases} x=4\cos t,\ y=4\sin t, \\ z=4-4\cos t-4\sin t. \end{cases}$$

**Решение.** По определению циркуляции векторного поля равна криволинейному интегралу второго рода по кривой $L$:

$$C=\oint_L \bar{a}\cdot d\bar{r}=\oint_L 4ydx-3xdy+xdz .$$

Вычисляем криволинейный интеграл, сводя его к определенному:

$$C=\oint_L 4ydx-3xdy+xdz=\int_0^{2\pi}\left(-16\sin t\cdot 4\sin t-12\cos t\cdot 4\cos t+4\cos t(4\sin t-4\cos t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-64+8\sin 2t\right)dt=\left(-64t-4\cos 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=-128\pi .$$

**Ответ.** $C = -128\pi$.

**2.** Дано векторное поле $\vec{a}(M) = (2x - 5y + 6z)\vec{i} + (-4x + 8y - 12z + 1)\vec{j} + (3x + 9y + 2z - 3)\vec{k}$, и пирамида с вершинами в точках $O(0,\ 0,\ 0),\ A(1,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 2,\ 0),\ C(0,\ 0{,}5)$. По теореме Стокса найти циркуляцию поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ по треугольнику $ABC$ в направлении, которое из начала координат видится по часовой стрелке.

**Решение.** Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ определяется формулой (1) и для ее определения воспользуемся формулой Стокса (4)

$$C = \oint\limits_{L_{ABC}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint\limits_{S_{ABC}} (\operatorname{rot}\bar{a} \cdot n) dS ,$$

где $S_{ABC}$ – грань $ABC$ пирамиды.

Найдем уравнение грани $ABC$ заданной пирамиды, воспользовавшись уравнением плоскости в отрезках $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$ или $10x + 5y + 2z = 10$. Определяем вектор внешней нормали к грани $ABC$: $\vec{n}_1 = (10,\ 5,\ 2)$ . Конструируем из него единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} = \left( \frac{10}{\sqrt{129}},\ \frac{5}{\sqrt{129}},\ \frac{2}{\sqrt{129}} \right).$$

По формуле (3) находим ротор векторного поля $\vec{a}(M)$, учитывая, что $P = (2x - 5y + 6z),\ Q = (-4x + 8y - 12z + 1),\ R = (3x + 9y + 2z - 3)$.

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - 5y + 6z & -4x + 8y - 12z + 1 & 3x + 9y + 2z - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial y}(3x + 9y + 2z - 3) - \frac{\partial}{\partial z}(-4x + 8y - 12z) \right)\vec{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z}(2x - 5y + 6z) - \frac{\partial}{\partial x}(3x + 9y + 2z - 3) \right)\vec{j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial}{\partial x}(-4x + 8y - 12z + 1) - \frac{\partial}{\partial y}(2x - 5y + 6z) \right)\vec{k} = (9 + 12)\vec{i} + (6 - 3)\vec{j} + (-4 + 5)\vec{k} =$$

$$= 21\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} .$$

Следовательно,

$$C = \iint\limits_{S_{ABC}} (21\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{129}}(10\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) dS = \frac{1}{\sqrt{129}} \iint\limits_{S_{ABC}} (21 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2) dS =$$

$$= \frac{227}{\sqrt{129}} \iint\limits_{S_{ABC}} dS .$$

Грань $ABC$ определяется условиями $S = \left\{ (x, y, z) : \begin{matrix} 10x + 5y + 2z = 10 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{matrix} \right\}$. Проекцию $D$ на плоскость $Oxy$ находим, исключая $z$ из условий, определяющих $S$:

$$S = \left\{ (x, y, z) : \begin{matrix} z = \dfrac{10 - 10x - 5y}{2} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow D = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0 \\ \dfrac{10 - 10x - 5y}{2} \geq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Отсюда, $D = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2(1 - x) \end{matrix} \right\}$.

Теперь переходим от поверхностного интеграла к двойному по проекции $D$:

$$C = \frac{227}{\sqrt{129}} \iint\limits_{D} \frac{\sqrt{129}}{2} dxdy = \frac{227}{2} S_D = \frac{227}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{227}{2} .$$

**Ответ:** $C$ = 227/2. .

**3.** Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} z\mathrm{d}x + \left(x^2 + z\right)\mathrm{d}y + \left(x + y\right)\mathrm{d}z ,$$

где $\Gamma$ - контур, образованный пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и параболоида $z = x^2 + y^2$ и обходимый по часовой стрелки, если наблюдать обход из начала координат.

**Решение.** Выберем поверхность $\Sigma$, для которой контур $\Gamma$ является границей, и сторону $\Sigma$, согласованную с заданным обходом контура $\Gamma$.

Координаты точек контура $\Gamma$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Исключая из системы переменные $x$, $y$, находим: $z^2 + z - 2 = 0$. Уравнение имеет допустимый корень $z = 1$. Следовательно, контур $\Gamma$ находится в плоскости $z = 1$. Абсциссы и ординаты точек контура удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. За поверхность $\Sigma$ выберем круг единичного радиуса, расположенный в плоскости $z = 1$, с центром на оси $Oz$.

Сторону поверхности $\Sigma$ выберем, зафиксировав единичный вектор нормали, равный $\vec{n}(M)=\vec{k}$. Имеем $\cos\alpha(M)=0$, $\cos\beta(M)=0$, $\cos\gamma(M)=0$. Отметим, что заведомо два слагаемых подынтегрального выражения поверхностного интеграла, получаемого с применением формулы Стокса, равны нулю.

По заданному интегралу определяем:

$$P(M)=z\,,\ Q(M)=x^2+z\,,\ R(M)=x+y\,.$$

Найдем частные производные:

$$P'_y(M)=0,\ P'_z(M)=1\,,\ Q'_x(M)=2x,\ Q'_z(M)=1\,,\ R'_x(M)=1,\ R'_y(M)=1\,.$$

По формуле Стокса (2) исходный интеграл представим поверхностным интегралом

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[(1-1)\cos\alpha-(1-1)\cos\beta+(2x-0)\cos\gamma\right]_M \mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}\sigma\,.$$

Вычислим поверхностный интеграл.

Поверхность $\Sigma$ имеет явное задание $z=1$, $x^2+y^2\le 1$, и взаимно однозначно проектируется на область $D=\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ плоскости $Oxy$. Область $D$ определим так:

$$D=\left\{(x,\,y)\,|\,-1\le y\le 1,\,-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Поэтому

$$2\iint\limits_{D} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\mathrm{d}x=0\,,$$

так как внутренний интеграл в этом повторном вычисляется по симметричному отрезку от нечетной функции.

**Ответ.** 0.

**4.** Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{ABCA} x^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z\,,$$

где $ABCA$ - контур треугольника $ABC$ с вершинами $A(1;\,0;\,0)$, $B(0;\,1;\,0)$, $C(0;\,0;\,2)$.

**Решение.** В качестве поверхности $\Sigma$ выберем часть плоскости

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1, \text{ или } z=2(1-x-y),$$

которая ограничена сторонами треугольника $ABC$ (рис. 1). Согласно заданному обходу контура треугольника выбираем верхнюю сторону треугольника. Единичный вектор нормали $\vec{n}_0(M)$ к выбранной стороне образует с ортом $\vec{i}$ оси $Ox$ острый угол $\alpha(M)$.

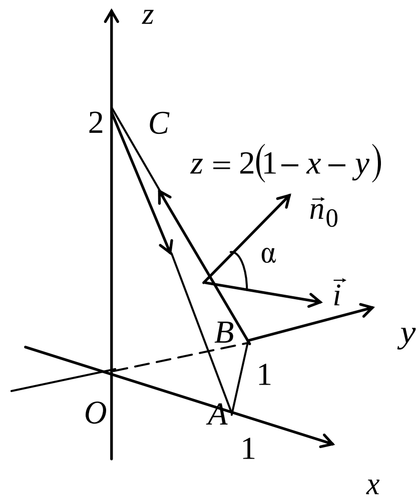


Рис. 1

По заданному интегралу определяем:

$$P(M)=x^2,\ Q(M)=z^2,\ R(M)=yz.$$

Отсюда

$$P'_y(M)=0,\ P'_z(M)=0,\ Q'_x(M)=0,\ Q'_z(M)=2z,\ R'_x(M)=0,\ R'_y(M)=z.$$

По формуле (2) исходный интеграл равен

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[(z-2z)\cos\alpha-(0-0)\cos\beta+(0-0)\cos\gamma\right]_M \mathrm{d}\sigma=-\iint\limits_{\Sigma} z\cos\alpha(M)\mathrm{d}\sigma.$$

Поверхность $\Sigma$ взаимно однозначно проектируется на область $E$ - треугольник $OAC$ и имеет явное задание $x=1-y-\frac{z}{2}$, $(y,z)\in E$. Поскольку $\cos\alpha(M)>0$, то приходим к интегралу

$$-\iint\limits_{E} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Для вычисления двойного интеграла положим: $E=\{(y,z)\,|\,0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2(1-y)\}$. Тогда

$$-\int\limits_0^1 \mathrm{d}y\int\limits_0^{2(1-y)} z\mathrm{d}z=-\int\limits_0^1\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{2(1-y)}\right)\mathrm{d}y=-2\int\limits_0^1(1-y)^2\,\mathrm{d}y=2\int\limits_0^1(1-y)^2\,\mathrm{d}(1-y)=$$

$$=\left.\frac{2}{3}(1-y)^3\right|_0^1=-\frac{2}{3}.$$

**Ответ.** $-\dfrac{2}{3}$.

**5.** Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{A}=(x-y)\cdot\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ вдоль контура $C$, который является линией пересечения конуса и плоскости (в положительном направлении):

$$C:\ \begin{cases}x^2+y^2-4z^2=0,\\ z=1/2.\end{cases}$$

**Решение.** Можно воспользоваться формулой Стокса, если на контур $C$ «натянуть» плоскость $z = 1/2$ и вычислить поток ротора векторного поля **A** через эту поверхность:

$$\tilde{N}=\int\limits_C \mathbf{A}\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint\limits_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s.$$

Найдём ротор векторного поля **A**:

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-y & x & z^2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot 0+\mathbf{j}\cdot 0+\mathbf{k}\cdot 2.$$

Поверхность $S$ является плоскостью $z = 1/2$, поэтому $\mathbf{n}=\{0, 0, 1\}$.

Элемент площади поверхности $ds$ можно выразить по формуле $ds=\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma\,|}=dx\,dy$, поскольку $\cos\gamma = 1$. Поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу по проекции поверхности $S$ на плоскость $Oxy$, которая является кругом радиуса 1:

$$\mathrm{C}=\iint\limits_S 2\cdot 1ds=\iint\limits_{Dxy}2dxdy=2\pi.$$

**Ответ:** $\mathrm{C}=2\pi$.