Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 13

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава 12, § 55 и [3]: глава 4, § 1 (см. прилагаемый список литературы).

Вычислите криволинейные интегралы 1-го рода.

1. $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – граница треугольника с вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$.

Ответ: $1+\sqrt{2}$.

2. $\int\limits_L y^2 dl$, где L – циклоида $x = a(t-\sin t), y = a(t-\cos t), 0 \le t \le 2\pi$.

Ответ: $256a^3/15$.

3. $\int\limits_{AB} x^2 dl$, где L – верхняя половина окружности $x^2+y^2=4$ между точками $A(2,0)$, $B(-2,0)$.

Ответ: 4π.

4. $\int\limits_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $A(2,-2)$ до точки $B(8,4)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17^3}-\sqrt{5^3}}{3}$.

5. $\int\limits_L (x+4y)dl$, где L – правая петля кривой $r^2 = \cos 2\varphi$ $(x \ge 0)$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_L x dl$, где L – верхняя половина кривой $r = 1+\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Ответ: π.

7. $\int\limits_L (2x - z^2 y)dl$, где $L: x = t^2/2, y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, z = t, 0 \le t \le 1$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{2}}{33}+\dfrac{4\sqrt{2}}{27}+\dfrac{7}{12}$.

8. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, где L: $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), z=4a\sin\frac{t}{2}$ между точками $A(0,0,0)$, $B(2a\pi,0,0)$.

Ответ: $\frac{8a^3(\pi^3+3)}{3}$.

9. $\int\limits_L (x^3+y^3)dl$, где L: $(x^2+y^2)^2=2xy, x\geq 0, y\geq 0$.

Ответ: 2π

10. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=(1+\cos\varphi), 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

11. $\int\limits_L ydl$, где L – дуга астроиды $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$, заключенная между точками A(1,0) и B(0,1).

Ответ: 0,6.

12. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$.

Ответ: 8.

13. Найдите массу контура треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$, если его плотность в каждой точке равна $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}$.

Ответ: $17/2$.

14. Найдите массу дуги кривой $y=\ln x$ плотностью $\gamma=x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями $x: x_1=\sqrt{3}, x_2=\sqrt{8}$.

Ответ: $\frac{19}{3}$.

15. Найдите длину дуги цепной линии $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in[0;1]$.

Ответ: $\frac{e^2-1}{2e}$.