Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 17

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава 16, § 70-71 и [3]: глава 5, § 1 (см. прилагаемый список литературы).

1. Постройте линии уровня скалярного поля $U = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ для U= 1, 2, 3, 4.

Ответ: окружности с центром в начале координат радиусов соответственно $1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{2}$.

2. Найдите поверхности уровня скалярного поля $U = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Ответ: сферы $x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)^2$, где c= e^U.

3. Найдите поверхности уровня скалярного поля $U = \dfrac{x^2+y^2}{z}$.

Ответ: параболоиды вращения $x^2+y^2=cz$.

4. Найдите поверхности уровня скалярного поля $U = 5^{2x+3y-z}$.

Ответ: плоскости $2x + 3y - z = C$.

5. Найдите линии уровня скалярного поля $U = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$;

Ответ: семейство концентрических окружностей радиуса $\dfrac{1}{C}$ $(C \neq 0)$.

6. Найдите поверхности уровня скалярного поля $U = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ответ: конусы $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

7. Найдите точку, в которой градиент скалярного поля $U = \ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ равен вектору $\boldsymbol{l} = \mathbf{i} - \dfrac{16}{9}\mathbf{j}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right)$.

8. Дано скалярное поле $U = x^2yz^2 - 4y$. Найдите направление и величину наибольшей скорости изменения поля U в точке $M(3;0;4)$.

Ответ: $\mathbf{l} = 140\mathbf{j}$, 140.

9. Найдите производную скалярного поля $U = x^2y^2z^2$ в точке $M(1;-1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(0;1;1)$.

Ответ: – 22.

10. Найдите величину наибольшей производной по направлению в точке $M(1; 1; 2)$ скалярного поля $U = x^2y^2z - \ln(z-1)$.

Ответ: $\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{\text{наиб}} = 4\sqrt{2}$ по направлению градиента $\operatorname{grad} U(M) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$.

11. Найдите векторные линии векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} - 2(x^2 - x)\vec{j}$.

Ответ: $x-1\ ^2 + \frac{y^2}{2} = C$.