

**Задачи для самостоятельного решения по теме
практического занятия 9**

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава 11, § 53 и [3]: глава 3, § 2-3 (см. прилагаемый список литературы).

1. Вычислите интеграл $\iint_D x^2 y dx dy$, переходя к полярным координатам, где D – полукруг единичного радиуса, расположенный в полуплоскости $x \geq 0$.

Ответ: $\frac{2}{15}$.

2. Вычислите интеграл $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 3$, $y = x$, $x = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

Ответ: $\frac{\pi}{8}(e^3 - 1)$.

3. Вычислите $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$, используя полярные координаты.

Ответ: $\frac{\pi}{2}(1 - \ln 2)$.

4. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 11 - x^2$; $y = -10x$.

Ответ: 288.

5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 4\sqrt{x}$, $x = 1$.

Ответ: 2.

6. Вычислите площадь плоской области D , ограниченной заданными линиями

а) $D: y = 4x, x + y = 3, y \geq 0$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

б) $D: y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

7. Плоская пластинка G задана ограничивающими её кривыми: $x=0$, $y=0$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ ($x \geq 0, y \leq 0$), поверхностная плотность $\mu(x, y) = \frac{3x-2y}{x^2 + y^2}$.

Найдите массу пластинки.

Ответ: 5.

8. Найдите координаты центра масс однородной пластинки ($\mu(x, y) = 1$), ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $x_c = \frac{\sqrt{3} R}{\pi}$, $y_c = \frac{R}{\pi}$.

9. Пластинка D задана ограничивающими её кривыми, μ – поверхностная плотность. Найдите массу пластинки. $D: x=1, y=0, y^2 = 4x$ ($y \geq 0$); $\mu = 7x^2 + y$.

Ответ: 7.