Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 14

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава 12, § 56 и [3]: глава 4, § 2 (см. прилагаемый список литературы).

Вычислите криволинейные интегралы 2-го рода.

1. $\int\limits_{AB} xdy - ydx$, где AB – отрезок прямой, $A(0,0)$, $B(1,2)$.

Ответ: 0.

2. $\int\limits_{L} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L – дуга параболы $y = x^2, -1 \le x \le 1$.

Ответ: $-\dfrac{14}{15}$.

3. $\int\limits_{ABC} (x + y)dx - xdy$, где ABC – ломаная, $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,2)$.

Ответ: 4.

4. $\int\limits_{L} (2 - y)dx + xdy$, где L: $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi$.

Ответ: -2π.

5. Найдите работу силового поля $F = (x + y)i - xj$ вдоль окружности $x = \cos t, y = \sin t$ в направлении по часовой стрелки.

Ответ: 2π.

6. $\int\limits_{L} \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: -2π.

7. Найдите работу силового поля $F = zi - xj + yk$ вдоль винтовой линии $x = a\cos t$, $y = b\sin t,\ z = ct$ от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,2\pi)$.

Ответ: $\pi a(2c - b)$.

8. $\int\limits_{OABC} ydx + zdy + xdz$, где $OABC$ – ломаная, $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(a,a,0)$, $C(a,a,a)$.

Ответ: a^2.

9. $\int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz$, где L – часть кривой $x^2 + y^2 = R^2$, $z = H$ от точки $(R,0,H)$ до точки $(-R,0,H)$, проходящая через точку $(0,R,H)$.

Ответ: $-\dfrac{\pi R^6}{16}$.

10. $\int\limits_L zdx + xdy + ydz$, где L – линия пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $z = 0$.

Ответ: 4π.

11. Применив формулу Грина, вычислите интеграл $\oint\limits_L xy^2dy - x^2dx$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Ответ: $\pi a^4/2$.

12. Применив формулу Грина, вычислите интеграл $\oint\limits_L (x^2 - y^2)dx + 2xydy$, где L – контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,3)$ с положительным направлением обхода.

Ответ: $40/3$.

13. Найдите площадь области, ограниченной эллипсом $x = 2\cos t, y = \sin t$.

Ответ: 2π.

14. Найдите площадь области, ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью OX и прямыми $x = 1, x = 2$.

Ответ: $\ln 2$.