Задачи для самостоятельного решения по теме практического занятия 18-19

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава 12, § 58, глава 16, § 71 и [3]: глава 5, § 2-3 (см. прилагаемый список литературы).

1. Дано векторное поле $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Найдите поток поля через внешнюю сторону поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\quad x + y + z = a.$

Ответ: 0.

2. Найдите поток векторного поля $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ через часть плоскости P: $x + y + z - 1 = 0$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. Найдите поток векторного поля $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + 2y + 3z - 1 = 0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

Ответ: $\frac{1}{18}$.

4. Определите поток векторного поля $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через боковую поверхность конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2} \le \frac{z^2}{H^2},\quad 0 \le z \le H$.

Ответ: $\frac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2 + 2H^2)$.

5. Определите поток векторного поля $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через внешнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ \ (z \ge 0)$.

Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}$.

6. Найдите поток векторного поля $\mathbf{A} = (\ln y + 7x)\,\mathbf{i} + (\sin z - 2y)\,\mathbf{j} + (e^y - 2z)\,\mathbf{k}$ через поверхность σ, где σ – наружная сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$.

Ответ: 4π.

7. С помощью формулы Остроградского-Гаусса определите поток векторного поля $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности куба $0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le a,\quad 0 \le z \le a.$

Ответ: $3a^4$.

8. С помощью формулы Остроградского-Гаусса определите поток векторного поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

Ответ: $\frac{a^3}{2}$.

9. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса, вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\Sigma} 2x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}z - 3z^4 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Σ - внешняя сторона поверхности тела T, заданного неравенствами $x^2 + y^2 \le 3$, $0 \le z \le 1$.

Ответ: 18π.

10. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса, вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Σ - внешняя сторона поверхности пирамиды T, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.