

Лекция 7. Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование иррациональных функций

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где a, b, c, d –

действительные числа, $\alpha, \beta, \dots, \delta, \gamma$ – натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем *дробно-линейной подстановки* $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k –

наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \dots, \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и

$dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a) - (b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2} dt$, т.е. x и dx выражаются через рациональные

функции от t . При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t .

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt{x-1}}$.

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем

$x-1 = t^6$, $x = t^6 + 1$, $dx = 6t^5 dt$, $t = \sqrt[6]{x-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 + t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t+1} = 6 \int \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt = \\ &= 6 \int \left(t-1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 3t^2 - 6t + 6 \ln|t+1| + C = \\ &= 3 \cdot \sqrt[6]{x-1} - 6 \cdot \sqrt[6]{x-1} + 6 \ln \left| \sqrt[6]{x-1} + 1 \right| + C. \end{aligned}$$

1. Интегралы, содержащие квадратичные иррациональности

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$, $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ называют

неопределенными интегралами от *квадратичных иррациональностей*. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , можно

вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ – также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \left(Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} \right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x .

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$.

Преобразуем квадратный трехчлен:

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 4 = 4 - (x-1)^2$$

и сделаем подстановку: $x-1=t$, $x=t+1$, $dx=dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{2} + C = \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

2. Найти интеграл $I = \int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$.

По формуле (8.11) имеем

$$I = \int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \lambda \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = A \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 5} + (Ax + B) \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}},$$

т.е.

$$2x^2 = A(x^2 + 2x + 5) + (Ax + B)(x + 1) + \lambda,$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему

$$\text{при } x^2: \quad 2 = A + A,$$

$$\text{при } x^1: \quad 0 = 2A + A + B,$$

$$\text{при } x^0: \quad 0 = 5A + B + \lambda.$$

Решая ее, находим $A=1$, $B=-3$, $\lambda=-2$. Следовательно,

$$I = (x-3)\sqrt{x^2+2x+5} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} =$$

$$= (x-3)\sqrt{x^2+2x+5} - 2 \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x+5} \right| + C.$$

2. Тригонометрические и гиперболические подстановки

Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических или гиперболических функций, с помощью следующих *тригонометрических и гиперболических подстановок*:

1) $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, используем подстановки

$$x = a \sin t, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt$$

или

$$x = a \operatorname{th} t, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\operatorname{ch} t}, \quad dx = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 t} dt;$$

2) $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, используем подстановки

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

или

$$x = a \operatorname{sh} t, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt;$$

3) $\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, используем подстановки

$$x = \frac{a}{\cos t}, \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t, dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$$

или

$$x = a \operatorname{ch} t, \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t, dx = a \operatorname{sh} t dt.$$

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$.

Положим $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{3\sin t} \cdot 3\cos t dt = \int \frac{9\cos^2 t}{3\sin t} dt = \\ &= 3 \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = 3 \int \frac{dt}{\sin t} - 3 \int \sin t dt = 3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + 3 \cos t + C = \\ &= 3 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3} \right) \right| + 3 \cos(\arcsin \frac{x}{3}) + C = 3 \ln \left| \frac{x}{3 + \sqrt{9-x^2}} \right| + \sqrt{9-x^2} + C. \end{aligned}$$

В конце были произведены следующие преобразования:

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{\sin t}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{\frac{x}{3}}{1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{3 + \sqrt{9 - x^2}},$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{9 - x^2}.$$

3. Интегралы типа $\int R\left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

Подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа $\int R\left(t; \sqrt{a^2 - t^2}\right) dt$, $\int R\left(t; \sqrt{a^2 + t^2}\right) dt$, $\int R\left(t; \sqrt{t^2 - a^2}\right) dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических или гиперболических подстановок.

Отдельно рассмотрим интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Этот интеграл целесообразно находить с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$. После такой подстановки получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{a + bt + ct^2}}.$$

Далее интеграл сводится к табличному с помощью выделения полного квадрата под радикалом.

Аналогичная подстановка делается и в интеграле $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$. В этом случае полагают $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^3} dx$.

Так как $x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5$, то сделаем подстановку $x+1 = t$, $x = t-1$, $dx = dt$.

Тогда $I = \int \frac{\sqrt{t^2 - 5}}{t^3} dt$. Сделаем еще одну замену $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt = \frac{-\sqrt{5} \cdot \cos z}{\sin^2 z} dz$,

$z = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{-\sqrt{5} \cdot \cos z}{\sin^2 z} dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 z dz = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \int (1 + \cos 2z) dz = \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) + C = -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} \right) \right) + C = \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} \right) \right) + C = \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

В конце были произведены следующие тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned}
\sin 2z &= 2 \sin z \cos z = 2 \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} = \\
&= 2 \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} \right)} = \\
&= 2 \frac{\sqrt{5}}{x+1} \sqrt{1 - \frac{5}{(x+1)^2}} = 2 \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

4. Подстановки Эйлера

Подстановки Эйлера применяются в интегралах типа $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

Рассмотрим три случая.

1) $a > 0$. В этом случае делаем замену: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$. Тогда $ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$. Отсюда получаем $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$, $dx = \left(\frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t} \right)'_t dt$.

После проделанной подстановки под знаком интеграла получится рациональная функция.

2) $c > 0$. В этом случае делаем замену: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$. Тогда $ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}xt + c$. Отсюда получаем $x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$, $dx = \left(\frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} \right)'_t dt$.

После проделанной подстановки под знаком интеграла получится рациональная функция.

3) Трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни α и β , $\alpha \neq \beta$. Тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = |x - \alpha| \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$. Сделаем замену $\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha} = t^2$, отсюда получаем $x = \frac{a\beta - t^2\alpha}{a - t^2}$, $dx = \left(\frac{a\beta - t^2\alpha}{a - t^2} \right)'_t dt$.

Отметим, что вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера зачастую приводит к громоздким выражениям. Поэтому применять их надо в крайнем случае, когда интеграл не удастся вычислить другим способом.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$. Тогда $x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}$,

$dx = \left(\frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \right)'_t dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt$. При этом $x + \sqrt{x^2 + x + 1} = t$. Подставим все в интеграл,

получим

$$I = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2 t} dt.$$

Под знаком интеграла получилась правильная рациональная дробь. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, что бы разложить ее на простейшие дроби.

Имеем

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{(1+2t)^2 t} = \frac{A}{1+2t} + \frac{B}{(1+2t)^2} + \frac{C}{t},$$

$$At(1+2t) + Bt + C(1+2t)^2 = 2t^2 + 2t + 2.$$

Из полученного равенства находим коэффициенты: $A = 1$, $B = -3$, $C = 2$. Таким образом

$$I = \int \left(\frac{1}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} + \frac{2}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |1+2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2t} + 2 \ln |t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| 1 + 2 \left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \right| + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 2 \left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right)} + 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

Интегрирование дифференциального бинома

Интеграл типа $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ (называемый интегралом от *дифференциального бинома* или *биномиальным интегралом*), где a, b – действительные числа; m, n, p – рациональные числа, берется в элементарных функциях, как показал Чебышев П.А., лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел p , $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p – целое число, то производится подстановка $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n ;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то производится подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p ;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то производится подстановка $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, где s – знаменатель дроби p .

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т.е. «не берутся».

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx$.

Так как

$$I = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

то $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 3$ (целое число). Следовательно, имеем второй случай

интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем $\sqrt{x} + 1 = t^2$, $x = (t^2 - 1)^2$,

$dx = 2(t^2 - 1) \cdot 2t dt$, $t = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$. Таким образом,

$$I = \int \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 4t(t^2 - 1) dt = 4 \int (t^2 - 1)^2 dt = 4 \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt =$$

$$= 4 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) + C = 4 \left(\frac{(\sqrt{\sqrt{x} + 1})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{\sqrt{x} + 1})^3}{3} + \sqrt{\sqrt{x} + 1} \right) + C =$$

$$= 4\sqrt{\sqrt{x} + 1} \left(\frac{1}{5}(\sqrt{x} + 1)^2 - \frac{2}{3}(\sqrt{x} + 1) + 1 \right) + C.$$

Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях

Существуют интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях. Доказано, например, что неопределенный интеграл от функции e^{-x^2} , играющий большую роль в теории вероятностей, не выражается в элементарных функциях. То же самое можно сказать про интегралы

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx. \quad (2)$$

Интеграл $\int \frac{dx}{\ln x}$ подстановкой $\ln x = t$ сводится к интегралу $\int \frac{e^t}{t} dt$ и, следовательно, тоже не берется в элементарных функциях.

Используя формулу интегрирования по частям, можно показать, что интегралы

$$\int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad \int \frac{e^x}{x^n} dx$$

сводятся к интегралам (2). Например,

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\int \sin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \sin x + \int \frac{1}{x} d \sin x = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} dx.$$