Лекция 18. Системы дифференциальных уравнений

1. Общие понятия

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений n-порядка называется совокупность уравнений

$$F_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0\,,$$

$$F_2(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

$$F_n(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0\,.$$

Частным случаем такой системы является *нормальная система* (разрешенная относительно производных) *дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} dy_1 / dx &= f_1(x, y_1, ..., y_n)\,, \\ dy_2 / dx &= f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dy_n / dx &= f_n(x, y_1, ..., y_n)\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Совокупность функций

$$y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$$

определенных в промежутке *(a, b)* называется *решением системы* (1), если эти функции тождественно удовлетворяют уравнениям (1), т. е. если

$$dy_k(x)/dx \equiv f_k(x, y_1(x), ..., y_n(x))\,, \qquad k = 1, ..., n\,, \qquad x \in (a, b)\,.$$

Задача Коши формулируется так: найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0\,,$$

где $(x_0, y_1^0, ..., y_n^0) -$ произвольная точка из области *D*. Другими словами, задача Коши состоит в том, чтобы найти решение, проходящее через точку $(x_0, y_1^0, ..., y_n^0)$.

Совокупность *n* функций

$$y_1 = y_1(x, c_1, ..., c_n),$$
$$y_2 = y_2(x, c_1, ..., c_n) \qquad (2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = y_n(x, c_1, ..., c_n)$$

определенных в некоторой области изменения переменных $x, c_1, ..., c_n$ и имеющих частные производные по *x*, называется *общим решением* системы (1) в области *D* изменения переменных $x, y_1, ..., y_n$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если:

1) система уравнений (2) разрешима в области *D* относительно произвольных постоянных $c_1, ..., c_n$,

2) совокупность функций (2) является решением системы (1) при всех значениях разрешенных произвольных постоянных, когда точка $x, y_1, ..., y_n$ пробегает область *D*.

Чтобы найти решение системы (1) с заданными начальными условиями $y_1(x_0) = y_1^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0$ при помощи формулы общего решения (2), поступают так:

1) подставляют в (1) вместо $x, y_1, ..., y_n$ соответственно числа $x_0, y_1^0, ..., y_n^0$,

2) решают полученную систему относительно $c_1, ..., c_n$, находят $c_1 = c_1^0, ..., c_n = c_n^0$,

3) подставляя найденные значения постоянных в формулу (2), получают искомое решение

$$y_i = y_i(x, c_1^0, ..., c_n^0), (i = 1, ..., n),$$

называется *частным решением*.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется *особым*.

Функция $q(x, y_1, ..., y_n)$ (которую мы будем предполагать непрерывно дифференцируемой и не сводящейся к постоянной) называется *интегралом* системы (1), если она тождественно обращается в постоянную вдоль любого частного решения, отсюда $dq = 0$.

Нормальная система n уравнений не может иметь более чем n независимых интегралов. Так что если $q_1, ..., q_n$ – независимые интегралы системы (1), то всякий другой интеграл этой же системы будет функцией от $q_1, ..., q_n$. Равенство $q(x, y_1, ..., y_n) = c$

называется *первым интегралом* системы (1). Совокупность n независимых первых интегралов системы (1) $q_i(x, y_1,..., y_n) = c_i, (i = 1,..., n)$ называется *общим интегралом* этой системы. (Первые интегралы называются независимыми, если входящие в них интегралы независимы.)

Если, интегрируя нормальную систему n-го порядка, мы получаем семейство интегральных кривых, зависящее от произвольных постоянных, в виде, не разрешенном ни относительно произвольных постоянных, ни относительно искомых функций, то это семейство мы также будем называть *общим интегралом* этой системы.

2. Методы интегрирования системы дифференциальных уравнений

Один из основных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений заключается в следующем: из уравнений системы (1) и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение более высокого порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности без интеграции, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования. Данный метод называется *интегрированием системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка*.

Если система дифференциальных уравнений состоит из n уравнений первого порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию, т. е. имеет вид

$$
\begin{gathered}
dy_1 / dx = f_1(x, y_1)\,, \\
dy_2 / dx = f_2(x, y_2)\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dy_n / dx = f_n(x, y_n)
\end{gathered}
$$

то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$
\begin{gathered}
dy_1 / dx = f_1(x, y_1)\,, \\
dy_2 / dx = f_2(x, y_1, y_2)\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

$$dy_n / dx = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

ее интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т. д. Такой метод называется *последовательным интегрированием*.

Интегрирование систем дифференциальных уравнений (1) нередко осуществляется *методом интегрируемых комбинаций*.

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений (1), но уже легко интегрирующееся, например являющееся уравнением вида

$$d\Phi(t, x_1, ..., x_n) = 0$$

или уравнением, сводящимся заменой переменных к какому-нибудь интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Например, решим систему уравнений

$$dx / dt = y, dy / dt = x .$$

Складывая почленно данные уравнения, находим одну интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y \text{ или } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt ,$$

откуда

$$\ln|x + y| = t + \ln c_1, \qquad x + y = c_1 e^t .$$

Почленно вычитая из первого уравнения системы второе, получаем вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x - y) \text{ или } \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt .$$

Проинтегрировав их, получим

$$\ln|x-y| = -t + \ln c_2,\ x - y = c_2 e^{-t}.$$

Итак, найдено два конечных уравнения:

$$x + y = c_1 e^t,\ x - y = c_2 e^{-t},$$

из которых может быть определено решение исходной системы

$$x = \frac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}),\ y = \frac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t}).$$

Одна интегрируемая комбинация дает возможность получить одно конечное уравнение

$$\Phi_1(t, x_1, ..., x_n) = c_1,$$

связывающее неизвестные функции и независимое переменное. Такое конечное уравнение является первым интегралом системы (1).

Если найдено k интегрируемых комбинаций, то получаем систему из k первых интегралов:

$$\Phi_1(t, x_1, ..., x_n) = c_1,$$
$$\Phi_2(t, x_1, ..., x_n) = c_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Phi_k(t, x_1, ..., x_n) = c_k$$

Если все эти интегралы независимы, т. е. если хотя бы один определитель

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k})} \neq 0,$$

где $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}$ – какие-нибудь k функций из $x_1, ..., x_n$, то из системы k первых интегралов можно выразить k неизвестных функций через остальные и, подставляя в систему (1), свести задачу к интегрированию системы уравнений с меньшим числом неизвестных.

Если $k = n$ и все интегралы независимы, то все неизвестные функции определяются из системы k первых интегралов.

3. Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений называется *линейной,* если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система линейных уравнений n-го порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i = 1,...,n),$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где X есть n-мерный вектор с координатами $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, F есть n-мерный вектор с координатами $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$, которые удобно в дальнейшем рассматривать как одностолбцовые матрицы:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad F = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{Vmatrix} dx_1 / dt \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n / dt \end{Vmatrix}.$$

Определим линейный оператор L равенством $L[X] = \frac{dX}{dt} - AX$, тогда систему линейных уравнений n-го порядка можно записать в виде $L[X]=F$.

Если все $f_i(t) \equiv 0, (i = 1,...,n)$, или, матрица $F = 0$, то система линейных уравнений n-го порядка $L[X]=0$ называется *линейной однородной*.

Нетрудно проверить, что оператор L обладает следующими двумя свойствами:

$$1)\ L[cX] = cL[X],$$

где

c — произвольная постоянная,

$$2)\ L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2].$$

Отсюда следует, $L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i L[X_i]$.

Таким образом, если *X* является решением линейной однородной системы, то *cX* является решением той же системы, а также, сумма $X_1 + X_2$ двух решений однородной линейной системы уравнений является решением той же системы. Следовательно, линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} c_i X_i$ с произвольными постоянными коэффициентами решений $X_1, X_2, ..., X_n$ линейной однородной системы *L* [*X*] = 0 является решением той же системы.

Векторы $X_1, X_2, ..., X_n$, называются *линейно зависимыми* на отрезке (*a*,*b*), если существуют постоянные $q_1, q_2, ..., q_n$ такие, что

$$q_1 X_1 + q_2 X_2 + ... + q_n X_n \equiv 0$$

при $a \le t \le b$, причем по крайней мере одно $q_i \ne 0$. Если же последнее тождество справедливо лишь при $q_1 = q_2 = ... = q_n = 0$, то векторы $X_1, X_2, ..., X_n$ называются *линейно независимыми*.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ *n* линейно независимых решений $X_1, X_2, ..., X_n$ линейной однородной системы *L*[*X*]=0 с непрерывными на отрезке (*a*,*b*) коэффициентами $a_{ij}(t)$ является общим решением данной системы на том же отрезке.

Теорема 2. Общее решение на отрезке (*a*,*b*) неоднородной системы *L*[*X*]=*F* с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $a_{ij}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ соответствующей однородной системы *L*[*X*]=0 и любого частного решения $\overline{X}$ рассматриваемой неоднородной системы.

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами, то есть систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ \ (i = 1, ..., n),$$

в которой все коэффициенты a_{ij} постоянны.

Найдем линейно независимые решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами *методом Эйлера*. Будем искать решения однородной системы в виде

$$x_1 = h_1 e^{kt}, x_2 = h_2 e^{kt}, ..., x_n = h_n e^{kt},$$

с постоянными $h_j, (j = 1, ..., n)$. Подставляя эти решения в однородную систему, сокращая на e^{kt} и перенося все члены в одну часть равенства, получим

$$\begin{aligned} &(a_{11} - k)h_1 + a_{12}h_2 + ... + a_{1n}h_n = 0, \\ &a_{21}h_1 + (a_{22} - k)h_2 + ... + a_{2n}h_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + ... + (a_{nn} - k)h_n = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для того чтобы эта система *n* линейных однородных уравнений с *n* неизвестными $h_j, (j = 1, ..., n)$ имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (3) был равен нулю:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} - k \end{Vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением*.

Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение. Различают три случая.

1) Все корни $k_1, k_2, ..., k_n$ уравнения (4) различны и вещественны. В этом случае, полагая в системе (3) $k = k_i, (i = 1, ..., n)$, получают систему

$$(a_{11} - k_i)h_1 + a_{12}h_2 + ... + a_{1n}h_n = 0,$$

$$a_{21}h_1 + (a_{22} - k_i)h_2 + ... + a_{2n}h_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + \ldots + (a_{nn} - k_i)h_n = 0.$$

Решая ее, находят ненулевое решение $h_1 = h_{i1}, h_2 = h_{i2}, \ldots, h_n = h_{in}$.

Подстановка значений $h_j, (j = 1, \ldots, n)$ и $k = k_i$ в формулу частных решений даст решение однородной системы, соответствующее корню k_i:

$$x_{i1} = h_{i1}e^{k_i t}, x_{i2} = h_{i2}e^{k_i t}, \ldots, x_{in} = h_{in}e^{k_i t}$$

Построив решения, соответствующие всем корням $k_1, k_2, \ldots, k_n$ получим систему линейно независимых решений

$$h_{11}e^{k_1 t}, h_{12}e^{k_1 t}, \ldots, h_{1n}e^{k_1 t},$$

$$h_{21}e^{k_2 t}, h_{22}e^{k_2 t}, \ldots, h_{2n}e^{k_2 t},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_{n1}e^{k_n t}, h_{n2}e^{k_n t}, \ldots, h_{nn}e^{k_n t}.$$

Общим решением однородной системы будет $x_m = \sum_{i=1}^{n} c_i h_{im} e^{k_i t}, (m = 1, \ldots, n)$.

2) Корни характеристического уравнения (4) различны, но среди них имеются комплексные. Укажем вид частных решений, соответствующих комплексным корням. Если $a + ib$ – корень характеристического уравнения (4), то $a - ib$ тоже будет корнем. Построив решение вида $x_1 = h_1 e^{kt}, x_2 = h_2 e^{kt}, \ldots, x_n = h_n e^{kt}$, соответствующее корню $a + ib$, и отделив в нем вещественную и мнимую части, получим два вещественных линейно независимых частных решения однородной системы. Решения, соответствующие корню $a - ib$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a + ib$. Построив частные решения, соответствующие всем парам комплексно-сопряженных корней и всем вещественным корням, и, взяв линейную комбинацию $x_m = \sum_{i=1}^{n} c_i h_{im} e^{k_i t}, (m = 1, \ldots, n)$ всех построенных линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение рассматриваемой однородной системы.

3) Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Корню k_1 кратности s соответствует решение вида

$$x_1 = P_1(t)e^{k_1 t}, x_2 = P_2(t)e^{k_1 t}, \ldots, x_n = P_n(t)e^{k_1 t},$$

где $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$ – полиномы от t степени не выше $s-1$ (они могут вырождаться и в постоянные числа), причем среди коэффициентов всех этих полиномов s коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них. Положив поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим s линейно независимых частных решений. Если k_1 – вещественный корень, то эти частные решения тоже вещественны.

Если k_1 – комплексный корень, $k_1 = a + ib$, то $a - ib$ тоже будет корнем характеристического уравнения и притом той же кратности s. Найдя указанным выше методом s линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a + ib$, и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2s$ линейно независимых вещественных частных решений. Решения, соответствующие корню $a - ib$, будут линейно зависимыми с решениями, соответствующими корню $a + ib$.

Если наряду с кратным корнем k_1 имеются другие (кратные или простые) корни, то, построив n линейно независимых вещественных частных решений, соответствующих всем корням, и взяв их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы.