ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные и сводящиеся к однородным уравнения

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют следующий вид:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Здесь коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от переменных x и y. Данное уравнение приводим к уравнению с разделенными переменными путем деления на $f_2(x)g_1(y)$ и затем интегрируем. Получаем ответ в виде общего интеграла

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c,$$

где c – произвольное постоянное число.

Заметим, что при делении можно потерять частные решения, обращающие в нуль произведение $f_2(x)g_1(y) = 0$. В этом случае, если одно или оба уравнения $f_2(x) = 0$ и $g_1(y) = 0$ имеют решения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, то равенства $x = x_1, x = x_2, \ldots$ и $y = y_1, y = y_2, \ldots$ нужно присоединить к ответу.

Уравнение вида $y' = f(ax + by)$, где $b \neq 0$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $u = ax + by$, отсюда $u' = a + by'$. Здесь u – новая неизвестная функция.

Однородное уравнение может быть записано в виде

$$y' = f\left(y/x\right).$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $u = y/x$, отсюда $y = ux$, следовательно, $y' = xu' + u$.

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

приводятся к однородным уравнениям.

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то делаем замену $x = \tilde{x} + n$ и $y = \tilde{y} + m$, где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – новые переменные, а числа n и m находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} an + bm + c = 0 \\ a_1 n + b_1 m + c_1 = 0, \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, $b \neq 0$, то в этом случае делаем замену $z = ax + by$, следовательно, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b}\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{a}{b}$.

Примеры решения задач

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Решение. Общее решение находится следующим образом:

$$y = \int 2x dx + c = x^2 + c .$$

Семейством интегральных кривых данного уравнения является семейство парабол.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$.

Решение. Так как $y' = dy/dx$, найдем $y = \int e^x dx + c = e^x + c$. Это общее решение данного уравнения. Теперь подставим в общее решение $y = e$, $x = 1$. Получим уравнение относительно неизвестной постоянной c: $e = e + c$, отсюда $c = 0$. Таким образом, частное решение данного уравнения: $y = e^x$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Решение. Правая часть заданного уравнения определена, непрерывна в интервале (-1, 1), причем обращается в нуль на концах этого интервала. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy, \quad x = \arcsin y + c,$$

отсюда общее решение уравнения имеет вид: $y = \sin(x+c)$. Из равенства $\sqrt{1-y^2} = 0$ находим решения $y = \pm 1$, которые являются особыми.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \cos(x-y).$$

Решение. Сделаем подстановку $u = x - y$, тогда $u' = 1 - y' = 1 - \cos u$. Решаем полученное уравнение:

$$\int \frac{du}{1-\cos u} = x + c, \ \int \frac{du}{2\sin^2 u/2} = x + c, -\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = x + c.$$

Следовательно, общим интегралом данного уравнения будет

$$x + \operatorname{ctg}\frac{x-y}{2} = c.$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$$

Решение. Перепишем уравнение: $3x(2+y^2)dx = 2y(x^2+3)dy$. Разделяем переменные и представляем уравнение в виде

$$\frac{3xdx}{x^2+3}=\frac{2ydy}{y^2+2}.$$

Интегрируем данное равенство:

$$\int\frac{3xdx}{x^2+3}=\int\frac{2ydy}{y^2+2},\quad \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}=\int\frac{d(y^2+2)}{y^2+2},$$

следовательно, $\frac{3}{2}\ln(x^2+3)=\ln(y^2+2)+\ln c$, или $\frac{(x^2+3)^3}{(y^2+2)^2}=c$.

Отметим, так как c является произвольным постоянным числом, то иногда для упрощения записи ответа, вместо c записывают какую-нибудь функцию от нее, например, $\ln c$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'=-2xy\ ,\ y(1)=\frac{1}{e}.$$

Решение. Разделив переменные, получим $dy/y=-2xdx$. Интегрируя, найдем $\ln|y|=-x^2+\ln|c|$, или $y=ce^{-x^2}$. Решение $y=0$ является частным решением заданного уравнения. Используя начальное условие $1/e=ce^{-1}$, найдем $c=1$. Ответ запишется в виде $y=e^{-x^2}$.

7. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{y}{x}.$$

Оно является однородным. Сделав подстановку $u=\dfrac{y}{x}$ и $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$, получим уравнение на неизвестную функцию $u(x)$:

$$x\frac{du}{dx}=1-2u\,.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{du}{1-2u}=\int\frac{dx}{x}+\ln c\,,$$

отсюда

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2u\right|=\ln\left|x\right|+\ln c\,,\ \ln\left|1-2u\right|=-2\ln(xc)\,,$$

или $u=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(cx)^2}$. Возвращаясь к прежней переменной, найдем общее решение:

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2c^2x}.$$

Если $1-2u=0$, то $u=1/2$, или $y=x/2$. Это решение является особым вместе с решением $x=0$, $y\neq 0$.

8. Найти решение дифференциального уравнения

$$(y^2+xy)dx=(2x^2+xy)dy\,.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+xy}{2x^2+xy}\,.$$

Поделим числитель и знаменатель правой части равенства на x^2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}}{2 + \frac{y}{x}}.$$

Видно, что это однородное уравнение. Сделав замену $u = \frac{y}{x}$, получим

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u^2 + u}{2 + u}.$$

После несложных преобразований найдем $x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2+u}$. Разделив переменные, получим следующие интегралы:

$$\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{du}{u} - \int du + c.$$

Отсюда $\ln|x| + 2\ln|u| + u = c$ или, вернувшись к функции $y(x)$, запишем ответ в виде общего интеграла:

$$\ln|x| + 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = c.$$

Особыми решениями являются $x = 0$, $y \neq 0$ и $y = 0$, $x \neq 0$.

9. Найти решение дифференциального уравнения

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Решение. Это уравнение сводится к однородному уравнению, причем $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. В нашем случае система уравнений на числа n и m имеет вид:

$$\begin{cases} n+m-2=0 \\ n-m+4=0. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $n=-1$, $m=3$. Подставив $x=\tilde{x}-1$ и $y=\tilde{y}+3$ в заданное уравнение, получим однородное уравнение

$$(\tilde{x}+\tilde{y})d\tilde{x}+(\tilde{x}-\tilde{y})d\tilde{y}=0,$$

которое можно также переписать в виде $(1+\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}})d\tilde{x}+(1-\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}})d\tilde{y}=0$, или

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{1+\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{1-\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}.$$

Сделав замену $u=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$, получим

$$\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}}+u=\frac{1+u}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим $\tilde{x}^2+2\tilde{x}\tilde{y}-\tilde{y}^2=c$.

Вернувшись к старым переменным по формулам $\tilde{x}=x+1$ и $\tilde{y}=y-3$, получим общий интеграл исходного уравнения: $x^2+2xy-y^2-4x+8y=c$.

Особых решений нет.

10. Найти решение дифференциального уравнения

$$(2x+2y-1)dx+(x+y+2)dy=0.$$

Решение. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Таким образом, делаем замену $z=x+y$, отсюда $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$. Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y-1}{x+y+2}.$$

Сделав подстановку $z = x + y$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2z-1}{z+2} + 1.$$

После преобразований получим следующие интегралы:

$$\int \frac{z+2}{z-3} dz = -\int dx + c, \text{ или } \int dz + 5\int \frac{dz}{z-3} = -\int dx + c.$$

Вычислив их и вернувшись к прежней функции, найдем ответ:

$$2x + y + 5\ln|x + y - 3| = c.$$