## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

### Линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами, метод вариации постоянной

*Линейное однородное уравнение* $n$-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0,$$

где $a_1,a_2,...,a_n$ – вещественные постоянные числа. Общим решением уравнения будет $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$, где $c_1,c_2,...,c_n$ – произвольные постоянные числа. Для нахождения линейно независимых частных решений $y_1,y_2,...,y_n$ рассматриваемого уравнения используется *метод Эйлера*. Для этого составляем уравнение $k^n+a_1k^{n-1}+...+a_{n-1}k+a_n=0$, которое называется характеристическим. Решив его, получим четыре случая.

1) Корни $k_1,k_2,...,k_n$ – вещественные, не равные друг другу числа. Тогда $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$,..., $y_n=e^{k_nx}$.

2) Корни $k_1,k_2,...,k_n$ – не равны между собой, но среди них есть комплексно сопряженные корни. Каждой паре $k_m=p_m\pm iq_m$ соответствуют два частных решения $y_{1,m}=e^{p_mx}\cos q_mx$, $y_{2,m}=e^{p_mx}\sin q_mx$.

3) Корни $k_1,k_2,...,k_n$ – все вещественные, но среди них некоторые совпадают, например, $k_1=k_2=...=k_s=k$ (в этом случае говорят, что *корень* $k$ *имеет кратность* $s$). Совпадающим $s$ корням соответствуют следующие частные решения: $y_1=e^{kx}, y_2=xe^{kx}, y_3=x^2e^{kx},..., y_s=x^{s-1}e^{kx}$.

4) Корни $k_1,k_2,...,k_n$ содержат $s$ равных комплексно сопряженных пар $p\pm iq$, тогда им соответствуют $2s$ частных решения:

$$e^{px}\cos qx,\quad xe^{px}\cos qx,\quad x^2e^{px}\cos qx,...,\quad x^{s-1}e^{px}\cos qx,$$

$$e^{px}\sin qx,\quad xe^{px}\sin qx,\quad x^2e^{px}\sin qx,...,\quad x^{s-1}e^{px}\sin qx.$$

*Линейное неоднородное уравнение* $n$-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x),$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – вещественные постоянные числа. Общим решением данного уравнения является сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения: $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$. Для нахождения частного решения можно воспользоваться *методом Лагранжа (метод вариации постоянной)*. Для этого вначале находят общее решение соответствующего однородного уравнения: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$. Затем предполагают, что $c_1, c_2, ..., c_n$ являются функциями от $x$, и ищут общее решение неоднородного уравнения в виде $y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + ... + c_n(x) y_n$, где производные неизвестных функций $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ находят из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + ... + c_n'(x) y_n = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + ... + c_n'(x) y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + ... + c_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + ... + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Решив систему, мы найдем $c_1'(x) = q_1(x), c_2'(x) = q_2(x), ..., c_n'(x) = q_n(x)$. Проинтегрировав последние уравнения, определим неизвестные функции $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$, тем самым найдем общее решение линейного неоднородного уравнения.

### *Примеры решения задач*

**1.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

**Решение. С**оставим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$, его корни $k_1 = 2, k_2 = 3$, отсюда фундаментальная система решений $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Следовательно, общее решение имеет вид: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

**2.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \; y(0) = 2, \; y'(0) = -3.$$

**Решение.** Найдем вначале общее решение, для этого составим характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1, k_2 = 2$, отсюда фундаментальная система решений $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Следовательно, общее решение имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Теперь определим произвольные постоянные $c_1, c_2$ по заданным начальным условиям. Найдем производную $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$. Подставив начальные условия в $y$ и $y'$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = -3, \end{cases}$$

решением которой является $c_1 = 7, c_2 = -5$. Подставив найденные значения постоянных в общее решение, найдем частное решение: $y = 7e^x - 5e^{2x}$.

**3.** Найти общее решение уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0$ можно разложить так:

$$k^3 - k^2 - 4k^2 + 8k - 4 = 0, \quad k^2(k-1) - 4(k^2 - 2k + 1) = 0,$$

$$k^2(k-1) - 4(k-1)^2 = 0, \quad (k-1)(k^2 - 4k + 4) = 0, \quad (k-1)(k-2)^2 = 0.$$

Найдем корни $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2$. Первому корню соответствует частное решение $y_1 = e^x$. Второй корень двукратный, то есть кратности 2, поэтому ему соответствуют два частных решения: $y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}.$$

**4.** Найти общее решение уравнения

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$ поделим уголком на $(k-1)$, получим $(k^2 + 4k + 13)$. Следовательно, уравнение

$$k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = (k-1)(k^2 + 4k + 13) = 0,$$

имеет корни $k_1 = 1, k_{2,3} = -2 \pm 3i$. Первому вещественному корню соответствует частное решение $y_1 = e^x$, а паре комплексно сопряженных корней частные решения $y_2 = e^{-2x} \cos 3x, y_3 = e^{-2x} \sin 3x$. Общее решение запишется в виде: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \cos 3x + c_3 e^{-2x} \sin 3x$.

**5.** Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k + 1 = 0$ разложим на множители

$$k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k^4 - 2k^3 + k^2 + k^2 - 2k + 1 = 0,$$
$$k^2(k^2 - 2k + 1) + (k-1)^2 = 0, \quad k^2(k-1)^2 + (k-1)^2 = 0, \quad (k-1)^2(k^2 + 1) = 0$$

и найдем корни $k_1 = k_2 = 1, k_{3,4} = \pm i$. Первые два вещественных корня совпадают, их частные решения имею вид $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$. Следующие корни комплексно сопряженные, причем их реальная часть $p = 0$, отсюда их частные решения $y_3 = \cos x, y_4 = \sin x$. Таким образом, имеем общее решение заданного уравнения: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

**6.** Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$, которое можно переписать в виде $(k^2 + 2k + 2)^2 = 0$ имеет две равные комплексно-сопряженные пары корней $k_1 = k_2 = -1 + i, k_3 = k_4 = -1 - i$. Тогда, получим четыре частных решения:

$$y_1 = e^{-x} \cos x, \quad y_2 = x e^{-x} \cos x,$$
$$y_3 = e^{-x} \sin x, \quad y_4 = x e^{-x} \sin x.$$

Отсюда, общее решение запишется как

$$y = e^{-x}((c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x),$$

**7.** Найти частное решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет корни $k = \pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения: $y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$

Уравнения на неизвестные функции $c_1(x), c_2(x)$ следующие:

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0,$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Выразив $c_2'(x)$ из первого уравнения и подставив во второе, после несложных преобразований найдем $c_1'(x) = -\operatorname{tg} x$. Подставив найденное $c_1'(x)$ в первое уравнение и выразив оттуда $c_2'(x)$, определим $c_2'(x) = 1$. После интегрирования найдем

$$c_1(x) = \ln\cos x + c_1,\ c_2(x) = x + c_2,$$

где $c_1, c_2$ – произвольные постоянные числа. Запишем общее решение заданного неоднородного уравнения:

$$y = (\ln\cos x + c_1)\cos x + (x + c_2)\sin x.$$

Применив начальное условие $y(0) = 1$, получим

$$y(0) = (\ln\cos 0 + c_1)\cos 0 + (0 + c_2)\sin 0 = 1,$$

отсюда $c_1 = 1$. Вычислив производную

$$y' = -\frac{\sin x}{\cos x}\cos x - (\ln\cos x + c_1)\sin x + \sin x + (x + c_2)\cos x,$$

с учетом второго условия $y'(0) = 0$ найдем

$$y'(0) = -\frac{\sin 0}{\cos 0}\cos 0 - (\ln\cos 0 + 1)\sin 0 + \sin 0 + (0 + c_2)\cos 0 = 0,$$

отсюда $c_2 = 0$. Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = (\ln\cos x + 1)\cos x + x\sin x$.

**8.** Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ соответствующего однородного уравнения имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 2$, следовательно, общее решение однородного уравнения: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$.

Ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} + c_3(x)e^{2x}.$$

Система на функции $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} + c_3'(x)e^{2x} = 0, \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} + 2c_3'(x)e^{2x} = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} + 4c_3'(x)e^{2x} = e^x/(e^x + 1). \end{cases}$$

Определитель этой системы не равен нулю. Решив методом Крамера, найдем

$$c_1'(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^x + 1}, \quad c_2'(x) = \frac{1}{6}\frac{e^{3x}}{e^x + 1}, \quad c_3'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x + 1}.$$

Интегрируя последние равенства, получим

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + c_1,$$

$$c_2(x) = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x} d(e^x)}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int (e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1})dx =$$

$$=\frac{1}{6}(\frac{e^{2x}}{2}-e^{x}+\ln(e^{x}+1))+c_{2},$$

$$c_{3}(x)=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{e^{x}+1}=\frac{1}{3}\int\frac{e^{x}+1-e^{x}}{e^{x}+1}dx=\frac{1}{3}\int(1-\frac{e^{x}}{e^{x}+1})dx=\frac{1}{3}(x-\ln(e^{x}+1))+c_{3},$$

где $c_1, c_2, c_3$ – произвольные постоянные.

Итак, общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=c_{1}e^{x}+c_{2}e^{-x}+c_{3}e^{2x}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln(e^{x}+1)e^{x}+\frac{1}{6}(\frac{e^{2x}}{2}-e^{x}+\ln(e^{x}+1))e^{-x}+\frac{1}{3}(x-\ln(e^{x}+1))e^{2x}.$$