

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.

Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причём все первообразные содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – постоянная. *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех её первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределённого интеграла (правила интегрирования):

$$1^\circ. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ или } d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$2^\circ. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$3^\circ. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ где } a \text{ – постоянная.}$$

$$4^\circ. \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

$$5^\circ. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C$$

(инвариантность формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов:

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right).$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$3. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$7. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$4. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$8. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$5. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$9. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$6. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$$

$$11. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\left(\int e^u du = e^u + C \right).$$

$$12. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$16. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$17. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Отметим, что в приведённой таблице переменная u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству 5°).

При сведении данного интеграла к табличному часто используется приём *подведения функции под знак дифференциала* по формуле $f'(u)du = d[f(u)]$, например, $du = d(u+a)$ (здесь a – число), $du = \frac{1}{a}d(au)$ ($a \neq 0$), $u du = \frac{1}{2}d(u^2)$, $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$, $\cos u du = d(\sin u)$ и т. д. с тем, чтобы далее, в соответствии со свойством 5°, воспользоваться табличными интегралами.

Примеры решения задач

1. Используя таблицу, найти следующие интегралы: а) $\int \frac{dx}{x^3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $\int 2^x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение.

а) Воспользуемся табличным интегралом 1 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C.$$

б) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

в) Используя табличный интеграл 11 ($a = 2$), находим:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

г) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 14, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

2. Используя таблицу и основные свойства неопределённого интеграла,

найти интеграл: а) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{x} + 7 \right) dx$; б) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^2 + 9} dx$;

г) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Решение.

а) Воспользуемся свойствами 3° и 4° неопределённого интеграла, а затем табличными интегралами 11, 2, 1:

$$\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{x} + 7 \right) dx = 3 \int 5^x dx - 2 \int \frac{dx}{x} + 7 \int dx = 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - 2 \ln|x| + 7x + C$$

б) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

в) Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{x^2}{x^2 + 9} = \frac{(x^2 + 9) - 9}{x^2 + 9} = 1 - \frac{9}{x^2 + 9}$$

Тогда с учётом табличных интегралов 1 и 12, имеем

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 9} dx = \int \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9} \right) dx = \int dx - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = x - 3 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$$

г) Используем известные формулы тригонометрии, а также табличные интегралы 6 и 1:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

3. С помощью приёма подведения функции под знак дифференциала найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{x+3}$; б) $\int (3x-1)^{24} dx$; в) $\int \ln^4 x \frac{dx}{x}$; г) $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение.

а) Этот интеграл можно привести к табличной формуле 2 ($u = x + 3$):

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

б) Здесь относительно переменной $u = 3x - 1$ получаем интеграл от степенной функции:

$$\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \cdot \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C.$$

в) Поскольку $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$, то имеем:

$$\int \ln^4 x \frac{dx}{x} = \int \ln^4 x d(\ln x) = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$$

г) Так как $\sin x dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$