<u>ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11</u>

Экстремум функции двух переменных

Максимум или минимум функции называется её экстремумом. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума.*

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума!

Пусть $M_0(x_0, y_0)$– стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда

1) если $\Delta > 0$, то функция в точке M_0 имеет экстремум: максимум, если $A < 0$, минимум, если $A > 0$;
2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

(*достаточные условия наличия или отсутствия экстремума*)

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*).

Условие $\varphi(x, y) = 0$ определяет некоторую цилиндрическую поверхность в пространстве, которая пересекается с поверхностью

$z=f(x,y)$ по некоторой линии. Фактически необходимо исследовать на экстремум эту линию пересечения.

Укажем здесь два способа отыскания условного экстремума функции двух переменных.

I. Если уравнение связи записать в явном виде и подставить затем в уравнение $z=f(x,y)$, то останется лишь исследовать на экстремум полученную функцию одной независимой переменной.

II. Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой *функции Лагранжа* $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, где λ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} F'_x \equiv f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ F'_y \equiv f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ F'_\lambda \equiv \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Из этих трёх уравнений можно найти неизвестные $x=x_0$, $y=y_0$ и $\lambda=\lambda_0$.

Достаточные условия экстремума функции Лагранжа:

1) точка $M_0(x_0,y_0)$ будет точкой условного максимума, если $d^2F\big|_{M_0,\lambda_0}<0$ при $d\varphi\big|_{M_0}=0$;

2) точка $M_0(x_0,y_0)$ будет точкой условного минимума, если $d^2F\big|_{M_0,\lambda_0}>0$ при $d\varphi\big|_{M_0}=0$.

Здесь $d^2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dx\,dy+F''_{yy}dy^2$, $d\varphi=\varphi'_x dx+\varphi'_y dy$.

Для того чтобы найти *наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области*, надо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Примеры решения задач

1. Исследовать на экстремум функцию:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

б) $f(x, y) = 4x^2 y + 24xy + y^2 + 32y - 6$.

Решение.

а) Находим частные производные 1-го порядка: $z'_x = 2x + y - 3$, $z'_y = x + 2y - 6$. Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \text{ откуда } x = 0,\ y = 3 \Rightarrow M(0;3).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке M :

$$A = z''_{xx} = 2,\ B = z''_{xy} = 1,\ C = z''_{yy} = 2.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, $A > 0$. Следовательно, в точке $M(0;3)$ заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$.

б) Определим стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = 8xy + 24y = 0, \\ f'_y = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\, x_2 = -2, \\ x = -3 \quad \Rightarrow \quad y = 2. \end{array}\right.$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4;0), M_2(-2;0), M_3(-3;2)$.

Вычислим вторые производные: $f''_{xx} = 8y$, $f''_{xy} = 8x + 24$, $f''_{yy} = 2$.

Теперь для каждой из трёх точек определим $\Delta = AC - B^2$:

1) $M_1(-4;0)$: $A = 0, B = -32 + 24 = -8, C = 2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -64 < 0$, т. е. точка M_1 не является точкой экстремума;

2) $M_2(-2;0)$: $A = 0, B = -16 + 24 = 8, C = 2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 < 0$, т. е. точка M_2 не является точкой экстремума;

3) $M_3(-3;2)$: $A = 16, B = 0, C = 2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 32 > 0$. При этом $A > 0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ – точка локального минимума функции $f(x,y)$ с $f_{\min} = f(-3;2) = -10$.

2. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение.

Из уравнения связи находим: $y = \dfrac{5-2x}{3}$. Тогда $z = \dfrac{1}{3}(5x - 2x^2)$. Исследуем на экстремум эту функцию одной переменной: $z' = 0 \Leftrightarrow 5 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5/4$ – критическая точка. Это точка максимума, т.к. в ней $z'' = -4 < 0$. При $x = 5/4$ $y = 5/6$, $z = 25/24$, следовательно, в точке $(5/4;5/6)$ функция $z = xy$ достигает наибольшего значения $z_{\max} = 25/24$.

3. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение.

Пусть x и y – катеты треугольника, а z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $\tilde{z} = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $xy/2 = S$, т.е. $xy - 2S = 0$.

Из уравнения связи: $y = 2S/x$. Тогда $\tilde{z} = x^2 + \dfrac{4S^2}{x^2}$. Исследуем эту функцию на экстремум: $\tilde{z}' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^4 - 8S^2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2S}$ – критическая точка. Это точка минимума, т.к. в ней $\tilde{z}'' = 8 > 0$.

При $x = \sqrt{2S}$ $y = \sqrt{2S}$, $z = 2\sqrt{S}$. Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \le 9$.

Решение.

Здесь рассматривается область D, ограниченная окружностью $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$, включая и точки окружности.

Найдём стационарные точки данной функции. Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то в силу необходимых условий экстремума получаем: $x = 0,\ y = 0$.

Нетрудно видеть, что в точке (0;0) функция $z = x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение $z_{наим} = 0$, причём указанная точка является внутренней точкой области D.

Исследуем на условный экстремум функцию $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны соотношением $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

Рассмотрим функцию $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left((x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9\right)$. Для определения x, y и λ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+\lambda(x-\sqrt{2})=0, \\ y+\lambda(y-\sqrt{2})=0, \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x=y=5\sqrt{2}/2, \lambda=-5/3$ (при этом $z=25$) и $x=y=-\sqrt{2}/2, \lambda=-1/3$ (при этом $z=1$). Значит, наибольшее значение функция принимает в точке $(5\sqrt{2}/2;5\sqrt{2}/2)$. Итак, $z_{наим}=0$, $z_{наиб}=25$.