

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где m – целое число, большее единицы;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q < 0$, т. е. квадратный трёхчлен в

знаменателе не имеет действительных корней;

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$, где m – целое число, большее единицы и

квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней;

Во всех четырёх случаях предполагается, что A, B, p, q, a – действительные числа.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A}{1-m} (x-a)^{1-m} + C$;

III. Выделяем полный квадрат в знаменателе и делаем соответствующую подстановку:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{Ax + B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2} dt =$$

$$= A \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(B - A \frac{p}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2} \ln |t^2 + a^2| + \left(B - A \frac{p}{2} \right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

(здесь $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$).

IV. Аналогично,

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx = \int \frac{Ax + B}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^m} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{(t^2 + a^2)^m} dt = A \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(B - A \frac{p}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} =$$

$$= \frac{A}{2(1-m)} (x^2 + a^2)^{1-m} + \left(B - A \frac{p}{2} \right) \cdot J_m$$

Здесь $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, а интеграл $J_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ вычисляется с

помощью рекуррентной формулы

$$J_m = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2m-3}{2m-2} J_{m-1} + \frac{t}{2(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} \right),$$

позволяющей после $(m-1)$ -кратного применения свести данный интеграл

J_m к табличному $\int \frac{dt}{t^2 + a^2}$.

В общем случае, перед интегрированием рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ надо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из неё целую часть, т. е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $P_1(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x - a)^m \dots (x^2 + px + q)^n \dots,$$

где $p^2 - 4q < 0$, т. е. квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

3) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x - a)^m} + \frac{A_2}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x - a} + \dots \\ & \dots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{x^2 + px + q} + \dots; \end{aligned}$$

4) вычислить неопределённые коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Примеры решения задач

1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx$.

Решение:

Квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа.

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx &= \int \frac{6x-7}{(x+2)^2+9} dx = \left[\begin{array}{l} t = x+2 \Rightarrow x = t-2 \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{6t-19}{t^2+9} dt = \\ &= 6 \int \frac{t dt}{t^2+9} - 19 \int \frac{dt}{t^2+9} = 6 \cdot \frac{1}{2} \ln|t^2+9| - 19 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= 3 \ln(x^2+4x+13) - \frac{19}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

2. Найти интеграл $\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx$.

Решение.

Квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому данная дробь – простейшая четвёртого типа.

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx &= \int \frac{8x+5}{((x-1)^2+16)^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{8t+13}{(t^2+16)^2} dt = 8 \int \frac{t dt}{(t^2+16)^2} + 13 \int \frac{dt}{(t^2+16)^2} = \\ &= 8 \int \frac{\frac{1}{2} d(t^2+16)}{(t^2+16)^2} + 13 \cdot J_2 = -\frac{4}{t^2+16} + 13 \cdot J_2 \end{aligned}$$

Интеграл $J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+16)^2}$ вычисляется с помощью рекуррентной формулы при $m=2$, $a=4$:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+16)^2} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+16} + \frac{t}{2 \cdot 1 \cdot (t^2+16)} \right) = \\ &= \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{t}{t^2+16} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} \right) + C \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , находим окончательно:

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx = \frac{13}{32} \cdot \left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} \right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C$$

3. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{7x+4}{x^2-x-6} dx$; б) $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)} dx$;

в) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} dx$.

Решение.

а) Подынтегральная дробь – правильная. Разложив на множители знаменатель, представим её в виде суммы простейших дробей 1-го типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Приведём дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x+4 = A(x+2) + B(x-3). \quad (1)$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода сравнения коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод сравнения коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (1) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x+4 = (A+B)x + (2A-3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x . Сравнивая коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 2A-3B=4 \end{cases}.$$

Решая эту систему, найдём: $A=5$, $B=2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (1) частное значение $x=3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2),$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение (1) значение $x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, совпадающие с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим: $B = 2$.

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, значит,

$$\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx = 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} = 5 \ln|x - 3| + 2 \ln|x + 2| + C$$

б) Подынтегральная дробь – правильная, однако, её знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Разложим теперь дробь на простейшие:

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь затем от знаменателей, приходим к равенству:

$$x^2 + 5x - 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 1) + C(x - 1)(x + 1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A , B и C воспользуемся методом частных значений. Положим $x = 1$, тогда $A = 1$. Полагая $x = -1$, находим $B = 3$.

Осталось найти коэффициент C . Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким вычислениям. Проще всего положить $x=0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учётом найденных значений A и B , получим: $C=0$.

Итак,

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

в) Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r} x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \\ \underline{x^5 + \quad x^4 + \quad x^3} \\ - \quad x^4 - \quad x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \\ \underline{- \quad x^4 - \quad x^3 - \quad x^2} \\ \quad \quad \quad x^2 - 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + x \\ \underline{\quad \quad \quad x^2 - x} \end{array} \right.$$

т. е.

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} = x^2 - x + \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \int (x^2 - x) dx + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим её в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим:

$$x^2 - 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x$$

Воспользуемся методом сравнения коэффициентов. Для этого раскроем скобки в правой части и приведём подобные:

$$x^2 - 1 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты при x^2 , x^1 и x^0 в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + C = 0, \\ A = -1 \end{cases}$$

из которой находим: $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$.

Таким образом,

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

откуда

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = -\ln|x| + \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} =$$
$$= -\ln|x| + \ln|x^2 + x + 1| + C = \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C.$$