

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

### **Частные производные первого и высшего порядков.**

#### **Дифференциал функции нескольких переменных.**

*Частной производной от функции  $z = f(x, y)$  по независимой переменной  $x$  называется конечный предел*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном  $y$ .

*Частной производной от функции  $z = f(x, y)$  по независимой переменной  $y$  называется конечный предел*

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном  $x$ .

Для частных производных справедливы обычные формулы и правила дифференцирования.

*Частными производными второго порядка от функции  $z = f(x, y)$  называются частные производные от её частных производных первого порядка.*

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \text{ и т. д.}$$

*Смешанные производные*, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

*Полный дифференциал* функции  $z = f(x, y)$  вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

При достаточно малых  $|\Delta x|$  и  $|\Delta y|$  для дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  справедливы приближённые равенства

$$\Delta z \approx dz \quad \text{и} \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz,$$

где  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  – приращение функции, а дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е.  $dx = \Delta x$  и  $dy = \Delta y$ .

Аналогично определяется полный дифференциал функции трёх и более аргументов, например, для функции  $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

*Дифференциалом второго порядка* от функции  $z = f(x, y)$  называется дифференциал от её полного дифференциала, т. е.  $d^2 z = d(dz)$ .

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков:  $d^3 z = d(d^2 z)$ , ...,  $d^n z = d(d^{n-1} z)$ .

Если  $x$  и  $y$  – независимые переменные и функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Вообще, имеет место формула

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

### ***Примеры решения задач***

1. Найти частные производные функций:

а)  $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$ ; б)  $z = e^{x^2+y^2}$ ; в)  $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$ .

**Решение.**

а) Рассматривая  $y$  как постоянную величину, получим:

$$u'_x = 2x - 3y - 1. \text{ Рассматривая } x \text{ как постоянную, найдём: } u'_y = -3x - 8y + 2.$$

$$\text{б) } z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2};$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

$$\text{в) } \frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) = -u^4 \sin 2\varphi.$$

2. Показать, что функция  $z = y \ln(x^2 - y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

**Решение.**

Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left[ \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right] =$$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} \equiv \frac{z}{y^2}.$$

Получаем тождество, т. е. функция  $z$  удовлетворяет данному уравнению.

3. Найти полный дифференциал функции: а)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$ ;

б)  $u = x^{y^2} z$ .

**Решение.**

а) Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ .

б) Имеем  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ , где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Следовательно,

$$du = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1} dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x dy + y^2 \cdot x^{y^2 z} \ln x dz.$$

4. Вычислить приближённо  $\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}$ , исходя из значения функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ при } x=1, y=1.$$

**Решение.**

Значение функции  $z$  при  $x=1, y=1$  есть  $z = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \approx 0,785$ .

Найдём приращение функции  $\Delta z$  при  $\Delta x = -0,05, \Delta y = 0,02$ :

$$\begin{aligned} \Delta z \approx dz &= \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = -\frac{y \Delta x}{x^2 + y^2} + \frac{x \Delta y}{x^2 + y^2} = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,05}{2} = 0,035. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95} = z + \Delta z \approx 0,785 + 0,035 = 0,82$ .

5. Для функции  $z = y \ln x$  найти все частные производные второго порядка.

**Решение.**

Найдём частные производные первого порядка:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$ .

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln x) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

6. Найти  $d^2 z$  для функции  $z = \sin x \sin y$ .

**Решение.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y;$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$