Основные формулы комбинаторики

Согласно классическому определению подсчет вероятности события A сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными методами.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций, получаемых из элементов заданного конечного множества.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно правилами умножения и сложения.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать способами.

Правило суммы: если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект у можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать способами.

Решение вероятностных задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Существуют две схемы выбора m элементов () из исходного множества: *без возвращения* (без повторений) и *с возвращением* (с повторением). В первом случае выбранные элементы не возвращаются обратно; можно отобрать сразу все m элементов или последовательно отбирать их по одному. Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

1. Схема выбора без возвращений.

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по m элементов называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Из определения вытекает, что размещения – это выборки (комбинации), состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом и вычисляется по формуле

(1.1)

где , 1! = 1, 0! = 1.

Пример. Сколько различных буквосочетаний, состоящих из трех букв, можно составить из букв слова БУРАН?

Решение. Число буквосочетаний по 3 буквы из пяти букв слова БУРАН равно числу размещений по 3 из 5, т.е. . По формуле (1.1) найдем .

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n.

Из определения вытекает, что перестановки – это выборки (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. *Число перестановок* из n элементов обозначается символом и вычисляется по формуле

(1.2)

Сочетанием из n элементов по m элементов называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества.

Из определения возникает, что сочетания – это выборки (комбинации), каждая из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т.е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом и вычисляется по формуле

(1.3)

Отметим свойства сочетаний:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. .

Пример. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных?

Решение. Так как порядок выбора шаров не имеет значения, то выбрать 5 шаров из урны, в которой 20 шаров, можно способами. По формуле (1.3) находим: . Далее: 3 белых шара можно выбрать . Выбрать 2 черных шара из имеющихся в урне 8 можно способами. Поэтому число способов, которыми можно выбрать 3 белых и 2 черных шара определяется по правилу умножения .

2. Схема выбора с возвращением.

Если при выборке *m* элементов из *n* элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то размещения называются *размещениями с повторениями.*

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из *n* элементов по *m* с повторениями обозначается символом и вычисляется по формуле

(1.4)

Если при выборке *m* элементов из *n* элементы возвращаются обратно без последующего упорядочения, то говорят, что это *сочетания с повторениями*.

Число всех сочетаний из *n* элементов по *m* с повторениями обозначается символом и вычисляется по формуле

(1.5)

Пример. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Решение. Рассматриваемое множество состоит из трех элементов, а выборки имеют объем, равный 5. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5 в каждом. По формуле (1.5) имеем .

Пусть в множестве с *n* элементами есть *k* различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раз, …, *k*-й элемент – n_k раз, причем . Перестановки из *n* элементов данного множества называют *перестановками с повторениями из n элементов*.

Число перестановок с повторениями из *n* элементов обозначаются символом и вычисляются по формуле

(1.6)

Пример. Сколько существует способов размещения 9 человек в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы?

Решение. Применим формулу (1.6). Здесь $n = 9$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$. Число способов размещения 9 человек в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы равно = 1260.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

2. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя цифры: 2, 5, 7, 8.