Предмет теории вероятностей

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет *теории вероятностей*.

Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является *случайное событие*.

События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:

а) *достоверное событие* – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;

б) *невозможное событие* – событие, которое в результате опыта произойти не может;

в) *случайное событие* – событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным – выпадение 10 очков, а случайным – выпадение 3 очков.

Алгебра событий

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B. *Суммой нескольких событий*, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Примеры:

1) Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Если событие A – попадание первого стрелка, а событие B – второго, то сумма $A+B$ – это хотя бы одно попадание при двух выстрелах.

2) Если при броске игральной кости событием A_i назвать выпадение i очков, то выпадение нечетного числа очков при одном броске является суммой событий $A_1+A_3+A_5$.

Назовем все возможные результаты данного опыта его *исходами* и предположим, что множество этих исходов, при которых происходит событие A (исходов, *благоприятных* событию A), можно представить в виде некоторой области на плоскости. Тогда множество исходов, при которых произойдет событие *A+B*, является объединением множеств исходов, благоприятных событиям *A* или *B* (рис. 2.1).

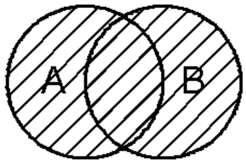

Рис.2.1.

Произведением AB событий *A* и *B* называется событие, состоящее в том, что произошло и событие *A*, и событие *B*. Аналогично *произведением нескольких событий* называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Примеры:

3) В примере 1 событием *AB* будет попадание обоих стрелков.

4) Если событие *A* состоит в том, что из колоды карт извлечена карта пиковой масти, а событие *B* – в том, что из колоды вынута дама, то событием *AB* будет извлечение из колоды дамы пик.

Геометрической иллюстрацией множества исходов опыта, благоприятных появлению произведения событий *A* и *B*, является пересечение областей, соответствующих исходам, благоприятным *A* и *B* (рис. 2.2).

Разностью $A\setminus B$ событий *A* и *B* называется событие, состоящее в том, что *A* произошло, а *B* – нет (рис. 2.3).

Примеры:

5) Вернемся к примеру 1, где $A\setminus B$ – попадание первого стрелка при промахе второго.

6) В примере 4 $A\setminus B$ – извлечение из колоды любой карты пиковой масти, кроме дамы. Наоборот, $B\setminus A$ – извлечение дамы любой масти, кроме пик.

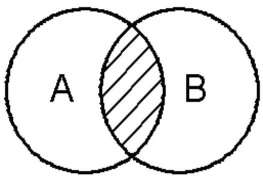

Рис. 2.2.

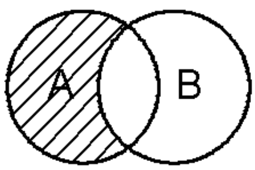

Рис. 2.3.

Введем еще несколько категорий событий.

События *A* и *B* называются *совместными*, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае (то есть если они не могут произойти одновременно) события называются *несовместными*. Совместными событиями являются, например, попадания двух стрелков в примере 1 и появление карты пиковой масти и дамы в примере 4; несовместными – события $A_1 – A_6$ в примере 2.

Если изобразить графически области исходов опыта, благоприятных несовместным событиям, то они не будут иметь общих точек.

Из определения несовместных событий следует, что их произведение является невозможным событием.

Говорят, что события B_1, B_2, …, B_n образуют *полную группу*, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта произойдет *одно и только одно* из них. Такие события называют *элементарными событиями полной группы*.

Пример.

В примере 2 события $A_1 – A_6$ (выпадение одного, двух, … , шести очков при одном броске игральной кости) образуют полную группу элементарных событий.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Выпадение любого числа очков при броске игральной кости, появление любой карты при случайном извлечении из колоды, выпадение герба или цифры при броске монеты и т.п. – это все равновозможные события.

Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Например, при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется *вероятностью события* и является вторым основным понятием теории вероятностей.

Отметим, что само понятие вероятности, как и понятие случайного события, является аксиоматическим и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой способы вычисления этой величины.

Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта, попарно несовместны, равновозможны и образуют полную группу, то говорят, что имеет место *схема случаев.*

Можно считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно n (число возможных исходов), а при m из них происходит некоторое событие A (число благоприятных исходов).

Вероятностью события A называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу всех возможных исходов:

(2.1)

Это *классическое определение вероятности*.

Из классического определения вытекают следующие свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть $m = n$, следовательно, $P(A) = 1$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому $m = 0$ и $P(A) = 0$.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все возможные исходы опыта можно свести к схеме случаев. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. В таких ситуациях требуется определять вероятность события иным образом. Для этого введем вначале понятие *относительной частоты* $W(A)$ события A как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие A, к общему количеству проведенных испытаний:

(2.2)

где N – общее число опытов, M – число появлений события A.

Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно считать вероятностью рассматриваемого события. *Статистической вероятностью события* считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Из формулы (2.2) следует, что свойства вероятности, доказанные для ее классического определения, справедливы и для статистического определения вероятности.

Для существования статистической вероятности события A требуется:

1) возможность производить неограниченное число испытаний;

2) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа опытов.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Пример. Если в задаче задается вероятность попадания в мишень для данного стрелка (скажем, p = 0,7), то эта величина получена в результате изучения статистики большого количества серий выстрелов, в которых этот стрелок попадал в мишень около семидесяти раз из каждой сотни выстрелов.

Еще одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием *геометрической вероятности.*

Пусть на отрезок L наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок L и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка L не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок l, являющийся частью отрезка L, вычисляется по формуле:

(2.3)

где l – длина отрезка l, а L – длина отрезка L.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область S и вероятности того, что она попадет на часть этой области s:

(2.3а)

где s – площадь части области, а S – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле V, попадет в его часть v, задается формулой:

(2.3б)

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Пример. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение. Пусть радиус круга равен R , тогда сторона шестиугольника тоже равна R. При этом площадь круга а площадь шестиугольника Следовательно,

Пример. На отрезок AB случайным образом брошены три точки: C, D и M. Найти вероятность того, что из отрезков AC, AD и AM можно построить треугольник.

Решение. Обозначим длины отрезков AC, AD и AM через x, y и z и рассмотрим в качестве возможных исходов множество точек трехмерного пространства с координатами (x, y, z). Если принять длину отрезка равной 1, то эти множество возможных исходов представляет собой куб с ребром, равным 1. Тогда множество благоприятных исходов состоит из точек, для координат которых выполнены неравенства треугольника: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$. Это есть часть куба, отрезанная от него плоскостями $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$.

x

Рис.2.4.

(одна из них, плоскость $x + y = z$, построена на рис.2.4). Каждая такая плоскость отделяет от куба пирамиду, объем которой равен . Следовательно, объем оставшейся части . Тогда

Примеры для самостоятельного решения

1. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

2. На отрезок наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что длина наименьшего из получившихся отрезков равна 0,25?