Случайные величины. Дискретная и непрерывная случайные величины

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется другое более удобное понятие *случайной величины*.

Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (*X, Y, Z, …*), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами ().

Примеры: число очков, выпавших при броске игральной кости; число появлений герба при 10 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель; расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.

Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: в вышеприведенном примере для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область. По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: *дискретные* и *непрерывные*.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется *законом распределения* случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины *X* – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение. Очевидно, что *X* может принимать три значения: 0, 1 и 2. Найдем соответствующие вероятности: = 0,4·0,3 = 0,12, = 0,6·0,3 + +0,7·0,4 = 0,46, = 0,6·0,7 = 0,42. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

	0	1	2
	0,12	0,46	0,42

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать графически, если на оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, на оси ординат – вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2),… называют *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения* (рис. 4.1).

Рис. 4.1

Функция распределения дискретной случайной величины

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является ее функция распределения, обозначаемая (или просто $F(x)$).

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины *X* называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *x*:

. (4.1)

Свойства функции распределения:

1) .

2) Функция распределения является неубывающей функцией.

3) В частности, если все возможные значения *X* лежат на интервале [*a, b*], то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала , равна разности значений функции распределения на концах интервала:

.

5) непрерывна слева, т.е. .

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события :

. (4.2)

Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции. Соответственно график такой функции распределения имеет ступенчатый вид.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Закон распределения полностью описывает поведение случайной величины. Но в ряде задач достаточно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный вопрос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

. (4.3)

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то , если полученный ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Пример. Определить математическое ожидание случайной величины X – числа бросков монеты до первого появления герба.

Решение. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел). Ряд ее распределения имеет вид:

X	1	2	…	n	…

p			…		…

Тогда ..+

+

(здесь при вычислении дважды использовалась формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии).

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной: .

2) Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:.

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины *зависимы*.

Назовем *произведением независимых случайных величин X и Y* случайную величину *XY*, возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений *X* на все возможные значения *Y*, а соответствующие им вероятности равны произведениям вероятностей сомножителей.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: .

Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

Определим *сумму случайных величин X и Y* как случайную величину *X + Y*, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения *X* с каждым возможным значением *Y*; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых: .

Дисперсия случайной величины

Для того, чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание. Рассмотрим две случайные величины: *X* и *Y*, заданные рядами распределения вида

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1
Y	0	100	
p	0,5	0,5	

Найдем их математические ожидания, получим .

Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для X $M(X)$ хорошо описывает поведение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения Y существенно отстоят от $M(Y)$. Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Дисперсией (*рассеянием*) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

(4.4)

В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Теорема 4.1. Дисперсия может быть вычислена по формуле:

. (4.5)

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

.

Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Как следствие из первого и третьего свойств получаем, что дисперсия суммы постоянной и случайной величины равна дисперсии случайной величины: .

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

.

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины *X* называется квадратный корень из дисперсии:

. (4.6)

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти математическое ожидание случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных.

2. Случайная величина *X* задана рядом распределения

	3	5	7	11
	0,14	0,20	0,49	0,17

Вычислить дисперсию случайной величины *X*.