Лекция 3. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов.

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию разлагать в степенной ряд, т.е. функцию представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно, для любой функции, определенной в окрестности точки и имеющей в ней производные до n-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c\in(x_0,x),$ – остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c=x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$. Формулу кратко можно записать в виде

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

где $P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т.е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\right)$, то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$, называемое *рядом Тейлора:*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходится, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{если } x\neq 0,\\ 0, \text{если } x=0,\end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0)=0$ при всяком n. Ряд Маклорена имеет вид

$$0+\frac{0}{2!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots.$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 3. Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$, т.е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

Необходимость. Обозначим S_n – частичную сумму ряда Тейлора

$$S_n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если ряд Тейлора сходится к $f(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n)=0$. Но по формуле Тейлора $f(x)-S_n=R_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

Достаточность. Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n)=0$, а S_n - частичная сумма ряда Тейлора. Поэтому ряд Тейлора сходится именно к функции $f(x)$.

Замечание. Если ряд Тейлора сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т.е. $R_n(x)=r_n(x)$. (Напомним, что $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, а $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$, а $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ – сумма ряда Тейлора).

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x)\to 0$ (при $n\to\infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 4. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M>0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$.

Доказательство. Оценим остаточный член формулы Тейлора

$$\frac{\left|f^n(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}<M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

так как показательная функция растет медленнее, чем $n!$. Поэтому (по предыдущей теореме) ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x), \ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Отметим, что в интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{7}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \tag{8}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1; 1), \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1; 1], \tag{10}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \quad x \in [-1; 1], \tag{11}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1; 1], \tag{12}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty), \tag{13}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty), \tag{14}$$

Пример. Выписать ряд Маклорена функции $f(x)=\ln(4-x)$.

Решение: Так как

$$f(x)=\ln(4-x)=\ln 4+\ln\left[1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (13.29), в которой заменим x на $\left(-\frac{x}{4}\right)$, получим:

$$\ln(4-x)=\ln 4+\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3}-\ldots,$$

или

$$\ln(4-x)=\ln 4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots,$$

если $-1<-\frac{x}{4}\le 1,$ т.е. $-4\le x<4.$

Приложения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

и $x_1\in(-R;R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x=x_1$, т.е.

$$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots,$$

а приближенное – частичной сумме $S_n(x_1)$, т.е.

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом $n.$ Абсолютная погрешность этого приближения равна модулю остатка ряда, т.е.

$$\left|f(x_1)-S_n(x_1)\right|=\left|r_n(x_1)\right|,$$

где

$$r_n(x_1)=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+\ldots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1)-S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)|=|u_{n+1}(x_1)+u_{n+2}(x_1)+u_{n+3}(x_1)+\ldots|<|u_{n+1}(x_1)|$$

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. В качестве оценки $|r_n(x_1)|$, берут величину остатка этого нового ряда.

Пример. Вычислить arctg 0.3 с точностью $\varepsilon=0.01$.

Решение.

$$arc\,\mathrm{tg}\, x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots, \qquad \mathrm{arctg}\, 0.3=0.3-\frac{(0.3)^3}{3}+\frac{(0.3)^5}{5}+\ldots$$

По следствию из признака Лейбница остаток числового знакочередующегося ряда оценивается модулем первого отброшенного члена. $|R_n|\le\frac{(0.3)^{n+1}}{n+1}<0{,}01$. Из этого неравенства найдем *n*, *n*=2. $\mathrm{arctg}\, 0.3\approx 0{,}3$.

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ с точностью до $\varepsilon>0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R;R)$ включит в себя отрезок $[a;b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример. Определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\mathrm{d}x$$

вычислить с точностью до $0{,}001$.

Решение. Для разложения подынтегральной функции в ряд применим разложение (13.26)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

где ряд сходится при любом значении *x*.

$$\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\cos x^{\frac{1}{2}}-1\right)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2!}+\frac{x}{4!}-\frac{x^2}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{(2n)!}+\ldots.$$

Обозначим данный интеграл через S, а искомое приближенное значение интеграла через S'.

$$S=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{4!}-\frac{x^2}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{(2n)!}+\ldots\right)\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x+\frac{1}{4!}\int_0^1 x\mathrm{d}x-\frac{1}{6!}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x+\ldots=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4!2}x^2-\frac{1}{6!3}x^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!n}x^n+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!n}+\ldots=S'+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(n+1)}+\ldots.$$

Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно, чтобы абсолютная величина последнего слагаемого в сумме S' была меньше числа 0,001.

Так как $\frac{1}{6!3}=\frac{1}{2160}<\frac{1}{1000}=0{,}001,$ то

$$S\approx S'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!2}-\frac{1}{6!3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{48}-\frac{1}{2160}=\frac{-1080+45-1}{2160}=-\frac{259}{540}.$$

3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y''=f(x;y;y'),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\qquad y'\big|_{x=x_0}=y'_0.$$

1 способ. (Последовательное дифференцирование).

Решение $y=y(x)$ уравнения ищем в виде ряда Тейлора:

$$y=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий. Подставив в уравнение значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \ldots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство. Ряд представляет искомое частное решение уравнения для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения.

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения, если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = x^2 + y^2,\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2,\ y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} &y''' = 2x + 2yy', \\ &y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \\ &y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots \end{aligned}$$

При $x = -1$ имеем:

$$\begin{aligned} &y'''(-1) = -2 + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 0, \\ &y^{(4)}(-1) = 2 + 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 2\cdot 5 = 22{,}5, \\ &y^{(5)}(-1) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 0 = 15, \ldots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots$$

2 способ. (Метод неопределенных коэффициентов).

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x), p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0,$ сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R),$ искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0, c_1 = y'_0.$

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение, заменив в нем $p_1(x), p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд сходится в том же интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ и служит решением уравнения.