Лекция 5. Ряды Фурье (продолжение)

Ряды Фурье для функций произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке [-*l*, *l*] с периодом $T = 2l$. Если сделать замену переменной $x = \frac{ly}{\pi}$, $(-\pi \le y \le \pi)$, то получившаяся функция $f(x) = f(\frac{ly}{\pi})$ будет периодической с периодом 2π. Ряд Фурье в этом случае имеет вид:

$$f(\frac{ly}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos ny + b_n \sin ny\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{ly}{\pi})\cos ny dy, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{ly}{\pi})\sin ny dy, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если теперь вернуться к переменной x по формуле $y = \frac{\pi x}{l}$, то получим разложение функции $f(x)$ в следующий тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что промежуток [-*l*, *l*] может быть заменен любым другим промежутком длины $2l$, к примеру, промежутком [0, 2*l*], тогда

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,\dots .$$

Для нечетной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,\dots .$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в ряд Фурье в промежутке $(0,2\pi)$.

В формулах

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=0,1,2,\dots);\quad b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=1,2,\dots)$$

полагаем $l=\pi$. Тогда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}(\pi x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=0,\quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n},\quad (n=1,2,3,\dots).$$

Здесь интегралы вычислялись методом интегрирования по частям. Таким образом, получаем ответ в виде ряда Фурье:

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad (0<x<2\pi).$$

График суммы данного ряда представлен на рис. 1.

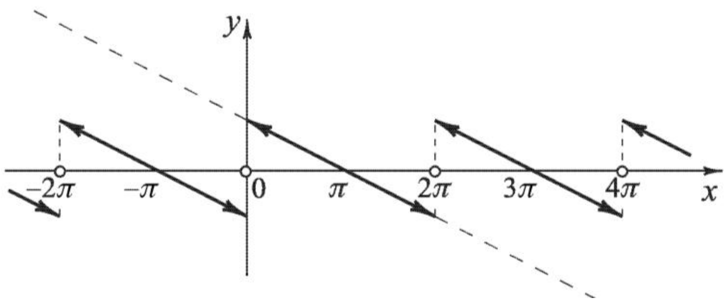

Рис. 1

Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b\text{-}a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 2).

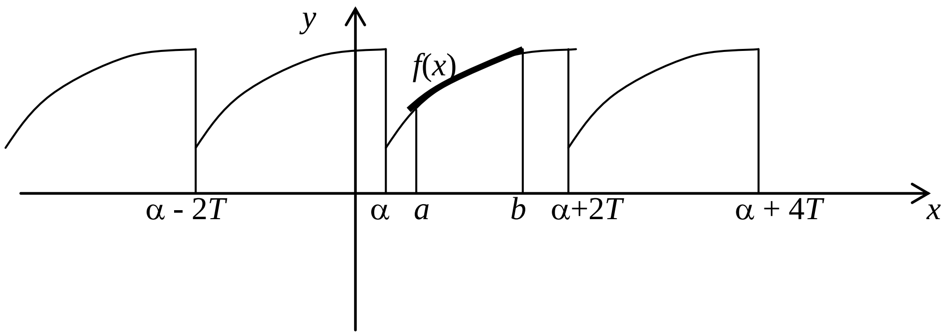

Рис. 2

Таким образом, функция $f(x)$ была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a, b]$ совпадает с функцией $f(x)$, т.е. можно считать, что функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[a, b]$.

В частности, пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[0,\pi]$. Дополним определение нашей функции для значений x в промежутке $[-\pi,0]$ произвольным способом. Можно дополнить так, чтобы получить для функции $f(x)$ разложение в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам.

Если предположить, что при $0<x\leq\pi$ выполняется условие $f(-x)=f(x)$, тогда получится четная функция в промежутке $[-\pi,\pi]$ с периодом 2π (см. рис. 3а).

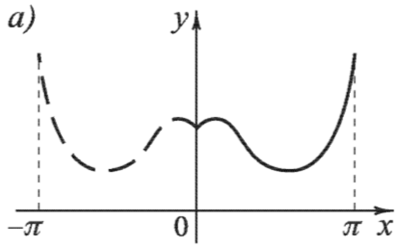

Рис. 3а

Ее разложение содержит только косинусы, а коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Если предположить, что при $0 < x \le \pi$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, тогда получится нечетная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$ с периодом 2π (см. рис. 3б).

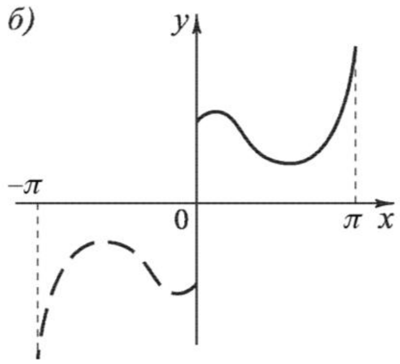

Рис. 3б

Ее разложение содержит только синусы, а коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx; \quad n = 1,2,\dots .$$

В общем случае, если функция $f(x)$ задана в промежутке $[0, l]$, то продолжая функцию четным образом на промежуток $[-l, 0]$, получим ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x;$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,\ldots .$$

Если продолжить функцию нечетным образом, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,\ldots .$$

Пример. Разложить функцию $f\left(x\right)=\sin ax$ в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[0,\pi]$.

Доопределим данную функцию на интервале $(-\pi,0)$ четным образом. Тогда по формуле

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx;\quad n=0,1,2,\ldots,$$

вычислим

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin axdx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos ax}{a}\Big|_0^{\pi}=\frac{2-2\cos a\pi}{\pi a},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\cdot\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(a+n)x+\sin(a-n)x)dx=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n\cos a\pi}{a^2-n^2}.$$

Тогда ряд Фурье $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ запишется в виде:

$$f(x)=\frac{1-\cos a\pi}{\pi a}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos a\pi}{a^2-n^2}\cdot\cos nx$$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, называются *ортогональными* на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0\,.$$

Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, называется *ортогональной системой функций* на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j\,.$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

Система функций называется *ортогональной и нормированной (ортонормированной)*, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Рядом Фурье по ортогональной системе функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi_n(x)$ называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx},$$

где $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда по ортогональной системе функций. $f(x)$ – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[a, b]$.

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx\,.$$