Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 3.1 (теорема сложения). Вероятность суммы событий *A* и *B* равна

. (3.1)

Теорему 3.1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий *A, B* и *C*

. (3.2)

Если же события *A* и *B* несовместны, то вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

. (3.3)

Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них обозначить *A*, то второе принято обозначать .

Таким образом, событие заключается в том, что событие *A* не произошло.

Теорема 3.2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

. (3.4)

В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (3.4).

Назовем *условной вероятностью* $P(B/A)$ события *B* вероятность события *B* при условии, что событие *A* уже произошло.

Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события *A* изменяет вероятность события *B*.

Пример. Пусть событие *A* – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие *B* – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется: Если же первая карта в колоду не возвращается, то осуществление события *A* приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза. Поэтому

Пример. Если событие A – попадание в самолет противника при первом выстреле из орудия, а B – при втором, то первое попадание уменьшает маневренность самолета, поэтому $P(B/A)$ увеличится по сравнению с $P(A)$.

Теорема 3.3 (теорема умножения). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

. (3.5)

Если подобным образом вычислить вероятность события BA, совпадающего с событием AB, то получим, что $P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$. Следовательно, справедливо равенство:

. (3.6)

Событие B называется *независимым* от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $P(B/A) = P(B)$.

Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Действительно, из (3.6) следует при этом, что $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$, откуда $P(A/B) = P(A)$. Значит, *свойство независимости событий взаимно.*

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

, (3.7)

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

В качестве определения независимости событий можно взять любое из соотношений:

1. ;

2. ;

3. .

Понятие независимости можно обобщить на любое конечное число событий.

События называются *независимыми в совокупности*, если для любого их подмножества имеет место равенство

,

для любых и любых различных номеров .

События называются *попарно независимыми*, если для любых , события и независимы.

Легко показать, что из независимости в совокупности следует попарная независимость, но из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Пример Бернштайна

На плоскость бросают правильный тетраэдр, три грани которого окрашены в красный, синий и зеленый цвета, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Событие A – при бросании выпал красный цвет, событие B – синий цвет, событие C – зеленый цвет. Вероятности этих событий равны между собой и составляют . Найдем вероятности их попарных произведений , и аналогично .

Отсюда следует, что они попарно независимы. Однако вероятность появления всех трех цветов равна

то есть вероятность произведения всех трех событий не равна произведению вероятностей этих событий, и, следовательно, они зависимы в совокупности.

Теорема 3.4. Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий A_1, A_2,…, A_n равна

, (3.8)

где q_i – вероятность события , противоположного событию A_i .

Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез)

Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий H_1, H_2,…, H_n, образующих полную группу несовместных событий. Тогда события H_1, H_2,…, H_n называются *гипотезами.*

Теорема 3.5. Вероятность события A, наступающего совместно с гипотезами H_1, H_2,…, H_n, равна:

(3.9)

где $P(H_i)$ – вероятность i- й гипотезы, а $P(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации этой гипотезы.

Формула (3.9) носит название *формулы полной вероятности*.

Пример. Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Пусть известен результат опыта, а именно то, что произошло событие A. Этот факт может изменить априорные (то есть известные до опыта) вероятности гипотез. Например, в предыдущем примере извлечение из урны белого шара говорит о том, что этой урной не могла быть третья, в которой нет белых шаров, то есть $P(H_3/A) = 0$. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется *формула Байеса*:

(3.10)

Действительно, из (3.6) получим, что откуда следует справедливость формулы (3.10).

Примеры для самостоятельного решения

1. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

2. Сколько нужно произвести бросков монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,9 выпал хотя бы один герб?