Схема повторения испытаний. Формула Бернулли. Приближение Пуассона для схемы Бернулли. Формулы Муавра-Лапласа

Рассмотрим серию из n испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется *схемой повторения испытаний*. Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно $к$ раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что A произошло в некоторых $к$ испытаниях и не произошло в остальных $n – к$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из n по $к$, то есть , а вероятность каждого из них: $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 – p$ – вероятность того, что в данном опыте событие A не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим *формулу Бернулли*:

. (3.11)

Пример. Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение. Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия.
Найдем вероятность этого по формуле Бернулли (1.20):

Тогда p = 0,0006092·0,05 = 0,0000304.

Значение , при котором вероятность (3.11) принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом появления события А*. Если $(n + 1)p$ – дробное число, то k_0 принимает единственное значение

, (3.12)

где […] – символ целой части числа. Если величина $(n + 1)p$ – целая, то k_0 принимает два значения

и . (3.13)

Из формулы Бернулли (3.11), в частности, следует, что в n испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, вероятность хотя бы одного появления события A равна

; (3.14)

появления не менее k_1 раз и не более k_2 раз – равна

. (3.15)

Если в серии из n независимых опытов, в каждом из которых может произойти одно и только одно из k событий с соответствующими вероятностями , то вероятность того, что в этих опытах событие появится раз, событие раз, …, событие раз, равна

, (3.16)

где .

Формула Пуассона

Формула Бернулли требует громоздких расчетов при большом количестве испытаний. Можно получить более удобную для расчетов приближенную формулу, для случая, когда количество испытаний велико, а вероятность наступления события А в одном испытании мала, т.е. для случая массовых и редких событий. Эта формула носит название *формула Пуассона*

, (3.17)

здесь . На практике формулу используют в случае .

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то справедливо соотношение:

(3.18)

где k – число появлений события A в n опытах, $q = 1 – p$, функция Лапласа (значения функции можно посмотреть в таблице).

Следствие. В условиях теоремы Муавра-Лапласа вероятность того, что событие *A* появится в *n* опытах ровно *k* раз, при большом количестве опытов можно найти по формуле:

(3.19)

где , а – *функция Гаусса*, значения этой функции приводятся в специальных таблицах.

Это следствие носит название *локальной теоремы Муавра-Лапласа*.

Примеры для самостоятельного решения

1. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 4 раза?

2. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что герб не выпадет ни разу?