Основные виды распределений дискретных случайных величин

Геометрическое распределение

Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании. Испытания проводятся до появления первого успеха. Введем случайную величину , принимающую значения , равную номеру первого успешного испытания. Тогда вероятность того, что первый успех произойдет в испытании с номером , вычисляется по формуле

. (4.7)

В этом случае говорят, что случайная величина *X* имеет *геометрический закон* распределения, обозначают ” .

Примером реальной случайной величины, распределенной по геометрическому закону, является число выстрелов, сделанное одним стрелком по мишени до первого попадания.

Ряд распределения случайной величины *X*, имеющей геометрическое распределение, имеет вид:

$X = k$	1	2	3	…
	p			…

Вероятности образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p, q^3p, … По этой причине распределение (4.7) называют геометрическим.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей геометрическое распределение, равны: ,

Биномиальный закон распределения

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины *X* – числа появлений события *A* в серии из *n* испытаний. Возможные значения *X*: 0, 1, …, *n*. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

(4.8)

(*p* – вероятность появления события *A* в каждом испытании).

Такой закон распределения называют *биномиальным*, поскольку правую часть равенства (4.8) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

Тот факт, что случайная величина имеет биномиальный закон распределения, обозначают " . Таким образом, биномиальный закон распределения имеет два параметра: количество испытаний, вероятность появления события в одном испытании.

Ряд распределения дискретной случайной величины *X*, имеющий биномиальное распределение, имеет вид:

$X = k$	0	1	2	. . .	k	. . .	n
$= P(X = k)$				. . .		. . .	

Функция распределения случайной величины *X*, распределенная по биномиальному закону, имеет вид:

(4.9)

Для дискретной случайной величины *X*, представляющей собой число появлений события в серии из *n* независимых испытаний, можно найти, используя свойство 4 математического ожидания. Пусть X_1 – число появлений события *A* в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

X_i	0	1
p_i	q	p

Следовательно, . Тогда

Аналогичным образом вычислим дисперсию: .

Распределение Пуассона

Рассмотрим дискретную случайную величину *X*, принимающую только целые неотрицательные значения 0, 1, 2,…, *m*,…, последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной *по закону Пуассона*, если вероятность того, что она примет значение *m*, выражается формулой:

, (4.10)

где – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона, обозначается ” .

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда и так, что постоянно.

Сумма всех вероятностей равна 1, действительно , здесь использовано разложение в ряд Тейлора функции .

Рассмотрим типичную задачу, приводящую к распределению Пуассона. Пусть на оси абсцисс случайным образом распределяются точки, причем их распределение удовлетворяет следующим условиям:

1) вероятность попадания некоторого количества точек на отрезок длины *l* зависит только от длины отрезка и не зависит от его расположения на оси (то есть точки распределены с одинаковой средней плотностью);

2) точки распределяются независимо друг от друга (вероятность попадания какого-либо числа точек на данный отрезок не зависит от количества точек, попавший на любой другой отрезок);

3) практическая невозможность совпадения двух или более точек.

Тогда случайная величина *X* – число точек, попадающих на отрезок длины *l* – распределена по закону Пуассона, где *a* – среднее число точек, приходящееся на отрезок длины *l.* Так, например, число вызовов на телефонной станции за время *t*, также подчиняется закону Пуассона.

Случайная величина *X*, распределенная по закону Пуассона, имеет следующий ряд распределения:

$X = m$	0	1	2	. . .	m	. . .
p_m				. . .		. . .

Ранее говорилось о том, что формула Пуассона (4.10) выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона. Если , то

Для определения дисперсии найдем вначале

Тогда

Таким образом, обнаружено интересное свойство распределения Пуассона: математическое ожидание равно дисперсии (и равно единственному параметру , определяющему распределение).

Примеры для самостоятельного решения

1. Стрелок проводит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Найти среднее значение числа попаданий.

2. Определить математическое ожидание случайной величины X – числа бросков монеты до первого появления герба.