Непрерывные случайные величины

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины функция распределения является непрерывной и вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифференциальная функция).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X* называется производная ее функции распределения:

. (4.11)

Функцию называют также *дифференциальной функцией распределения*; она является одной из форм закона распределения случайной величины, существует только для непрерывных случайных величин.

Свойства плотности распределения.

1) неотрицательная, т.е. .

2) Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток равна определенному интегралу от ее плотности в пределах от *a* до *b*, т.е.

. (4.12)

3) Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле

(4.13)

4) Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности вероятности непрерывной случайной величины в бесконечных пределах равен единице, т.е.

. (4.14)

5) так как при

Таким образом, график плотности распределения представляет собой кривую, расположенную выше оси О*x*, причем эта ось является ее горизонтальной асимптотой при (последнее справедливо только для случайных величин, множеством возможных значений которых является все множество действительных чисел). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, равна единице.

Как отмечалось выше для непрерывной случайной величины *X*, вероятность события $\{X = c\}$, где *c* – число, равное нулю. Действительно, .

Если все возможные значения непрерывной случайной величины сосредоточены на интервале $[a, b]$, то все интегралы вычисляются в этих пределах, а вне интервала $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$.

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана формулой Найти:

а) значение константы *C*;

б) вид функции распределения;

в) $P(-1 < x < 1)$.

Решение. а) значение константы *C* найдем из свойства 4:
откуда .

б)

в)

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Распространим определения числовых характеристик случайных величин на непрерывные случайные величины, для которых плотность распределения служит в некотором роде аналогом понятия вероятности.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется

(4.15)

Общее определение дисперсии сохраняется для непрерывной случайной величины таким же, как и для дискретной, а формула для ее вычисления имеет вид:

(4.16)

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле (4.6).

Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала [*a, b*], то интегралы в формулах (4.15) и (4.16) вычисляются в этих пределах.

Моменты старших порядков

Модой дискретной случайной величины *X* называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями, обозначается через . Для непрерывной случайной величины точка максимума (локального) плотности . Если мода единственная, то распределение случайной величины называется унимодальным, в противном случае полимодальным.

Медианой непрерывной случайной величины *X* называется такое ее значение , для которого

, (4.17)

т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина *X* меньше или больше .

Для дискретной случайной величины медиана обычно не определяется.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями следующих более общих понятий – моментов случайных величин.

Начальным моментом порядка k случайной величины *X* называется математическое ожидание *k*-й степени этой величины, обозначается .

Таким образом, по определению

. (4.18)

Для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой:

, (4.19)

а для непрерывной случайной величины – интегралом:

. (4.20)

В частности, .

Центральным моментом порядка k случайной величины *X* называется математическая величина , обозначается через .

Таким образом, по определению

. (4.21)

В частности, .

Для дискретной случайной величины: , а для непрерывной случайной величины: .

Можно получить соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты 3-го и 4-го порядков, называемые соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Коэффициентом асимметрии (“скошенности”) *A* случайной величины *X* называется величина

(4.22)

Если *A* > 0, то кривая распределения более полога справа от .

Если *A* < 0, то кривая распределения более полога слева от .

Коэффициентом эксцесса (“островершинности”) *E* случайной величины *X* называется величина

(4.23)

Величина *E* характеризует островершинность или плосковершинность распределения. Для нормального закона распределения *A* = 0 и *E* = 0; остальные распределения сравниваются с нормальным: если *E* > 0 – более островершинные, а распределения “плосковершинные” имеют *E* < 0.

Пример для саостоятельного решения

1. Найти случайной величины *X* , плотность распределения которой имеет вид