Лекция 4. Гармонический анализ. Ряды Фурье

Периодические функции. Гармонический анализ

В науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, т. е. такими, которые повторяются через определенный промежуток времени T, называемый периодом. Таковыми, например, являются сила и напряжение переменного тока.

Напомним, функция $f(x)$ называется *периодической функцией*, если она определена на всей числовой оси и удовлетворяет условию $f(x+T)=f(x)$ для всех x. Здесь число T называется *периодом*.

Например, периодическими функциями с периодом 2π являются тригонометрические функции

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \ldots .$$

Также из курса физики известно, что гармоническое колебательное движение описывает периодическая функция $y = A\sin(\omega t+\varphi)$ с периодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, где $\omega -$ частота, A – амплитуда.

Из этих функций могут быть составлены более сложные периодические функции:

$$y_0 = A_0, \; y_n = A_n \sin(n\omega t+\varphi_n), \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$, и периодами $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \ldots$. Также можно составить сумму этих функций

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t+\varphi_n),$$

которая будет также периодической функцией с периодом T. Отметим, что если сделать замену $x=\omega t=\dfrac{2\pi t}{T}$, то получится функция

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\varphi_n)$$

с периодом 2π.

Возникает обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $f(x)$ периода T представить в виде суммы конечного или бесконечного множества функций вида $A_n\sin(nx+\varphi_n)$? Геометрически это означает, что график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид, которые механически представляют собой гармоническое колебательное движение. Тогда функция $f(x)$ представляет собой более сложное колебание, которое разлагается на отдельные гармонические колебания. Поэтому отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx+\varphi_n)$ называют гармониками. Сам процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа*.

Если в разложении $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx+\varphi_n)$ раскрыть члены этого разложения по формуле для синуса суммы $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$, то получим

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\sin nx\cos\varphi_n+\cos nx\sin\varphi_n)=$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos nx+A_n\cos\varphi_n\sin nx).$$

Введем обозначения

$$A_0=\frac{a_0}{2},\quad A_n\sin\varphi_n=a_n,\quad A_n\cos\varphi_n=b_n,\quad (n=1,2,3,...),$$

тогда получим тригонометрическое разложение:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Итак, *тригонометрическим рядом* называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

или, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ также периодические функции с периодом 2π.

Ряд Фурье

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна $f(x)$.

Определим коэффициенты этого ряда.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,.. \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,..., \quad n = 1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0 .$$

Такой результат получается в результате того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = 0$.

Получаем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx .$$

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cosnx и интегрируем в пределах от -π до π:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)dx = \pi a_n$$

Отсюда получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,...$$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от -π до π. Получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция $f(x)$ – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

существуют и называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье.

Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. (**Теорема Дирихле**). Если функция $f(x)$ имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция $f(x)$ монотонна, то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится при всех значениях *x*, причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва его сумма равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$, для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется *кусочно – монотонной* на отрезке [-π;π].

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет период 2π, кроме того, $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится при всех значениях *x*, причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При этом ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции $f(x)$.

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется *кусочно – гладкой* на отрезке [-π;π].

Ряд Фурье для четной и нечетной функций

Выясним, как записывается ряд Фурье для четной и нечетной функции.

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если $f(x)$ – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, для четной функции $f(x)$ ряд Фурье записывается в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^3$ с периодом $T = 2\pi$ на отрезке [-π;π].

Решение. Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n = 1, 2, ...).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nxdx = \left\{\begin{matrix} u = x^3; & dv = \sin nxdx; \\ du = 3x^2dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos nxdx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right) = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \sin nxdx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{6\pi\cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right) = -\frac{2\pi^2\cos \pi n}{n} + \frac{12\cos \pi n}{n^3} = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx .$$

Построим графики заданной функции и ее разложение в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.

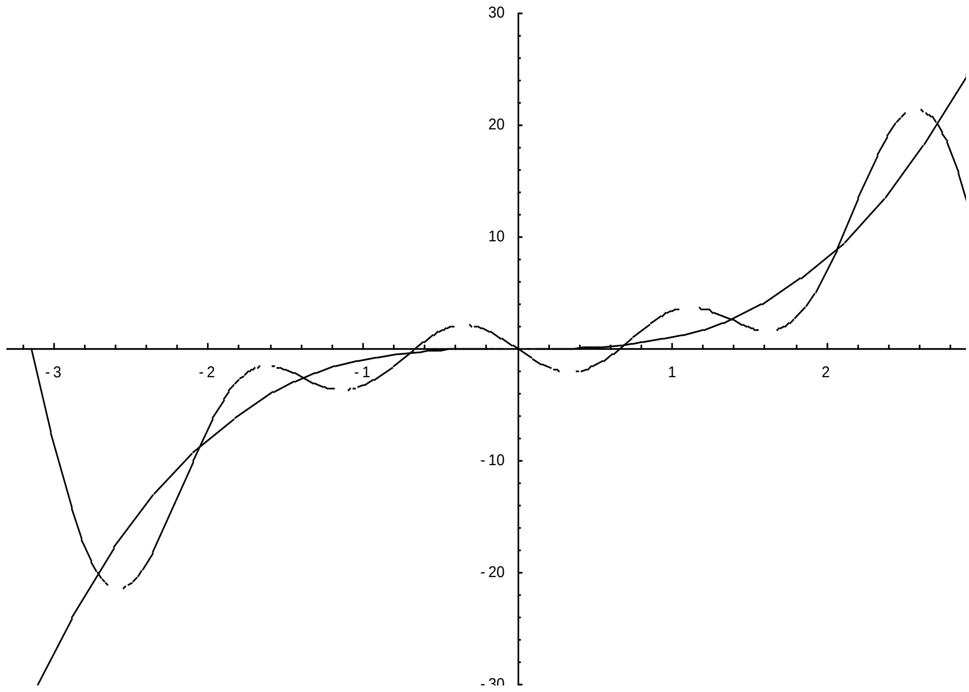

Рис. 1