ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

Приложения тройных интегралов

Приведем некоторые приложения тройных интегралов.

1. Объем *V* тела *V* находится по формуле:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,. \tag{1}$$

2. Масса *m* тела *V* с заданной плотностью $\gamma(x,y,z)$, где функция $\gamma(x,y,z)$ непрерывна, вычисляется по формуле:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz\,. \tag{2}$$

3. Статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тела *V* относительно координатных плоскостей *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* и координаты центра тяжести соответственно равны

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, M_{xz} = \iiint\limits_V y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, M_{yz} = \iiint\limits_V x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, \tag{3}$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}\,. \tag{4}$$

4. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\mu(x,y,z)dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\mu(x,y,z)dxdydz, \quad I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\mu(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}, \quad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}. \tag{5}$$

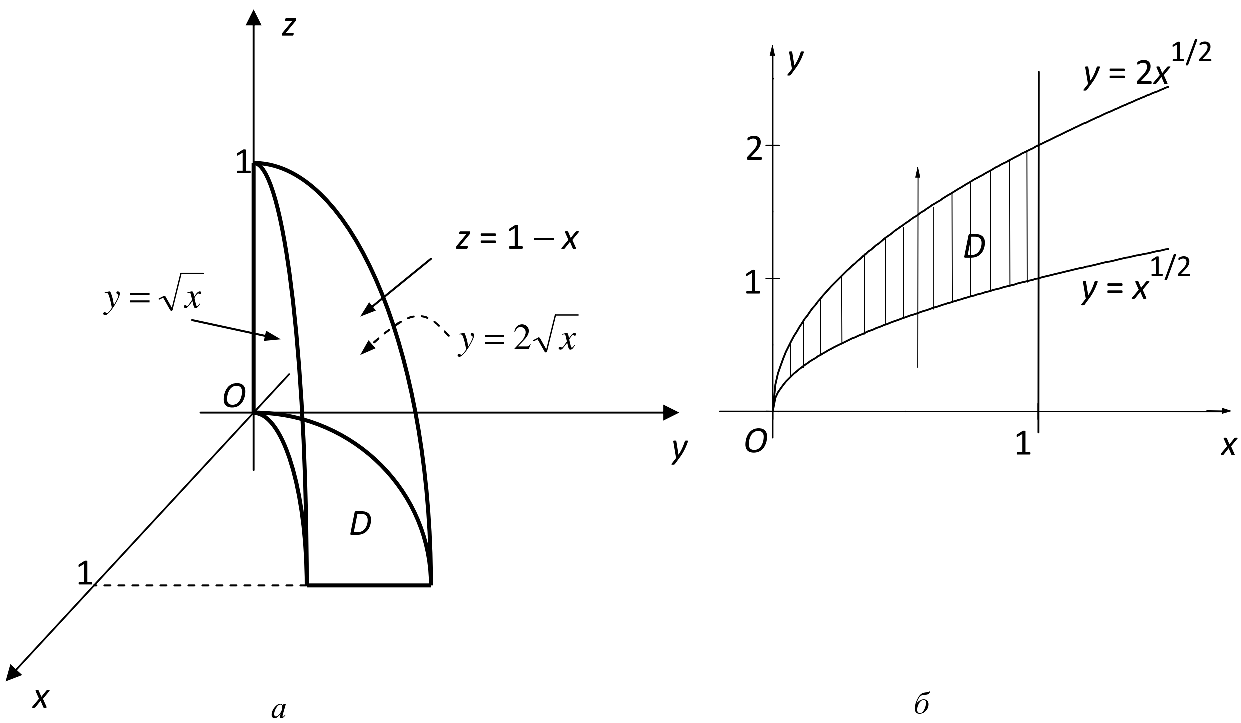
Примеры решения задач

1. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями

$$V: y = 2\sqrt{x},\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = 1 - x\,.$$

Решение. Объем тела определяется формулой (1). Изображаем заданную область интегрирования (рис. 1, *а*). Далее вычисляем полученный двойной интеграл. Область интегрирования *D* (проекция области *V* на *Oxy*) изображена на рис. 1, *б* и определяется неравенствами $D = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix} \right\}$, где границу $x = 1$ определили как пересечение плоскостей $z = 0$ и $z = 1 - x$. Переходим в двойном интеграле к повторному в соответствии с выбранным направлением интегрирования $V = \int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy$. Сводим тройной интеграл к двойному по проекции D области V на плоскость Oxy, проинтегрировав по переменной z:

$$V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x} dz = \iint\limits_D z\Big|_0^{1-x} dxdy = \iint\limits_D (1-x)dxdy\,.$$



а *б*

Рис. 1.

Осуществляем повторное интегрирование, получаем

$$V = \int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^1 (1-x)y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 (1-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx = \int\limits_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2})dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}\,.$$

Ответ: $V = \dfrac{4}{15}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями

$$V: z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{3}(x^2+y^2).$$

Решение.

Поскольку область интегрирования V – область, ограниченная верхней полусферой и параболоидом вращения (рис. 2), удобно перейти к цилиндрическим координатам. Искомый объем определяется формулой $V=\iiint\limits_{V^*}\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz$.

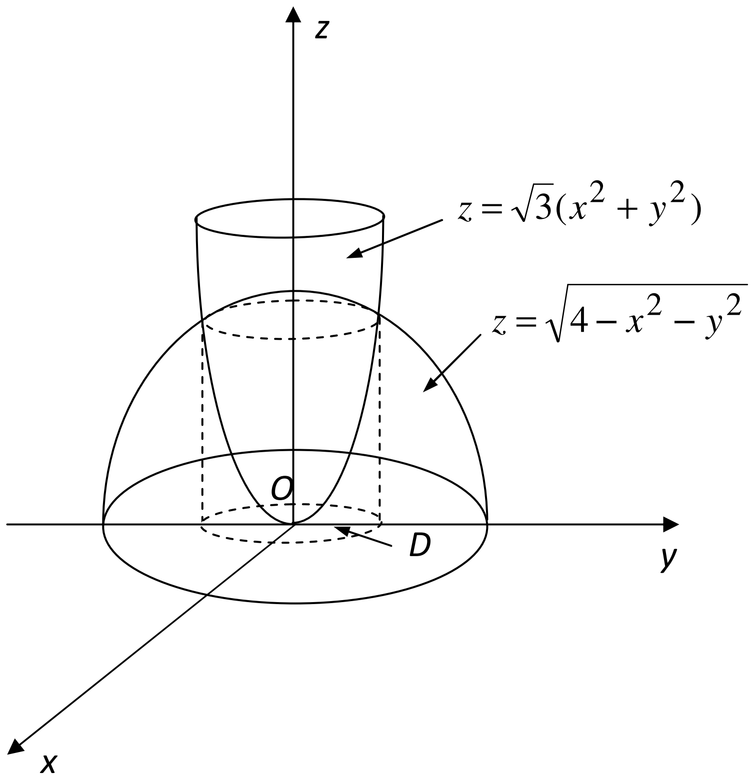


Рис. 2

Область интегрирования V^* в цилиндрической системе координат определяется неравенствами

$$V^*=\left\{(\rho,\varphi,z): \begin{matrix}\sqrt{3}\rho^2\le z\le\sqrt{4-\rho^2} \\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\end{matrix}\right\},$$

где $\rho=1$ определяется из уравнения $\sqrt{3}\rho^2=\sqrt{4-\rho^2}$ (как пересечение полусферы и параболоида). Переходим в тройном интеграле к повторному, получаем

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\, d\rho\int\limits_{\sqrt{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz.$$

Осуществляем повторное интегрирование, находим

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\sqrt{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \cdot z\Big|_{z=\sqrt{3}\rho^2}^{z=\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(\sqrt{4-\rho^2} - \sqrt{3}\rho^2\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho - \sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}\, d(4-\rho^2) - \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi - \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(8-3\sqrt{3})d\varphi - \frac{\sqrt{3}}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \left(\frac{16}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\pi .$$

Ответ: $V = \left(\frac{16}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\pi.$

3. Найти объем тела *V*, заданного ограничивающими его поверхностями $x = 17\sqrt{2y};\ x = 2\sqrt{2y};\ z = 0;\ z + y = \frac{1}{2}.$

Решение. Поверхности $x = 17\sqrt{2y};\quad x = 2\sqrt{2y};$ - это цилиндрические поверхности с вертикальными образующими. Две остальные поверхности являются плоскостями. Построив эти поверхности, получаем тело, ограниченное этими поверхностями (рис. 3, а).

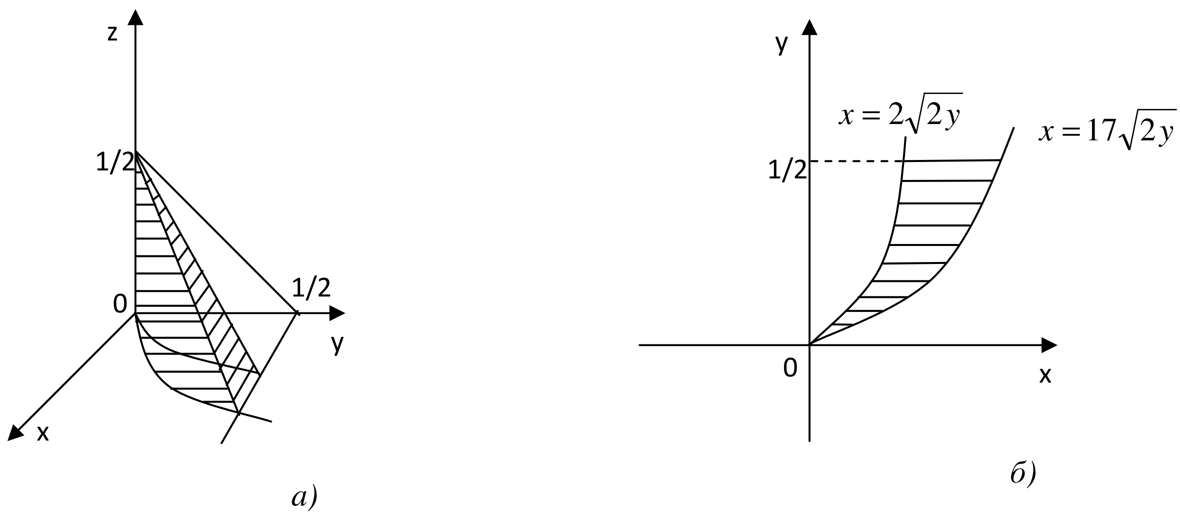


Рис. 3

Тело снизу ограничено поверхностью $z=0$, сверху – поверхностью $z = \frac{1}{2} - y$, и проекция его на плоскость Оxy совпадает с основанием D этого тела (рис. 3, б). Применим формулу (1), найдем

$$V=\iiint_G dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{1/2-y}dz=\iint_D(\frac{1}{2}-y)dxdy=\int_0^{1/2}dy\int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}(\frac{1}{2}-y)dx=$$

$$=\int_0^{1/2}(\frac{1}{2}x-yx)\Bigg|_{x=2\sqrt{2y}}^{x=17\sqrt{2y}}dy=\int_0^{1/2}(\frac{17}{2}\sqrt{2y}-17\sqrt{y}\cdot y-\sqrt{2y}+2y\sqrt{2y})dy=$$

$$=\int_0^{1/2}(\frac{15}{2}\sqrt{2}y^{1/2}-15\sqrt{2}y^{3/2})dy=(\frac{15}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2}-\frac{15\sqrt{2}}{5/2}y^{5/2})\Bigg|_0^{1/2}==\frac{5\sqrt{2}}{2^{3/2}}-2\cdot 3(\frac{\sqrt{2}}{2^{5/2}})=1.$$

Ответ: V=1.

4. Определить массу, статические моменты и координаты центра масс единичного куба с плотностью $\mu(x,y,z)=x+2y+3z$ (рис. 4).

Решение. Вычислим массу куба по формуле (2):

$$m=\iiint_V\mu(x,y,z)dxdydz=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(x+2y+3z)dz=\int_0^1dx\int_0^1dy\left[\left(xz+2yz+\frac{3z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]=$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1(x+2y+1{,}5)dy=\int_0^1dx\left[\left(xy+y^2+1{,}5y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]=\int_0^1(x+2{,}5)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2{,}5x\right)\Bigg|_0^1=3.$$

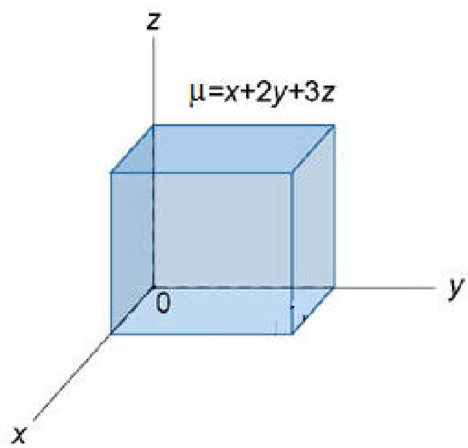


Рис. 4

Вычислим статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} по формулам (3):

$$M_{xy}=\iiint_G z\mu(x,y,z)dxdydz=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1z(x+2y+3z)dz=$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (xz + 2yz + 3z^2) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\left((x+2y)\frac{z^2}{2} + z^3 \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 (x + 2y + 2) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left[\left(xy + y^2 + 2y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right] = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+3) dx = \frac{7}{4}.$$

Аналогично находим моменты M_{xz} и M_{yz}:

$$M_{xz} = \iiint_G y\mu(x,y,z) dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 y(x + 2y + 3z) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (xy + 2y^2 + 3yz) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\left(xyz + 2y^2 z + \frac{3yz^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (xy + 2y^2 + \frac{3y}{2}) dy = \int_0^1 dx \left[\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} + \frac{3y^2}{4} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right] = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{17}{12} \right) dx = \frac{5}{3},$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\mu(x,y,z) dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 x(x + 2y + 3z) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + 2xy + 3xz) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\left(x^2 z + 2xyz + \frac{3xz^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + 2xy + \frac{3x}{2}) dy = \int_0^1 dx \left[\left(x^2 y + xy^2 + \frac{3xy}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right] = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{5x}{2} \right) dx = \frac{19}{12}.$$

Вычисляем координаты центра масс по формулам (4):

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{19/12}{3} = \frac{19}{36}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{5/3}{3} = \frac{5}{9}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{7/4}{3} = \frac{7}{12}.$$

Ответ: $x_c = \dfrac{19}{36}, \quad y_c = \dfrac{5}{9}, \quad z_c = \dfrac{7}{12}.$

5. Найти моменты инерции однородного цилиндра (μ = const) относительно осей *Ox* и *Oz* (рис. 5).

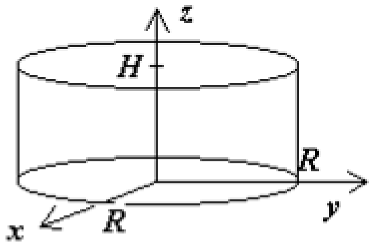


Рис. 5

Решение. Воспользуемся формулами (5) вычислим интегралы, переходя к цилиндрическим координатам:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint\limits_G \left(z^2 + y^2\right)\mu\, dxdydz = \mu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^H (z^2 + r^2 \sin^2\varphi)dz =$$

$$= \mu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\left(\frac{H^3}{3} + r^2 H \sin^2\varphi\right)dr = \mu \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{H^3 R^2}{6} + \frac{R^4}{4} H \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \mu\frac{H^3R^2}{6}2\pi + \mu\frac{R^4}{4}H\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \mu\frac{H^3R^2}{3}\pi + \mu\frac{R^4}{4}H\left(\pi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$\frac{\mu\pi H^3R^2}{3} + \frac{\mu\pi HR^4}{4};$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint\limits_G \left(y^2 + x^2\right)\mu\, dxdydz = \mu \iiint\limits_{G^*} r^2\ rd\varphi drdz =$$

$$= \mu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr \int\limits_0^H dz = \mu\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} H = \frac{\mu\pi HR^4}{2}.$$

Ответ: $I_x = \dfrac{\mu\pi H^3R^2}{3} + \dfrac{\mu\pi HR^4}{4},\ I_z = \dfrac{\mu\pi HR^4}{2}.$