ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Предположим, что область D можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$$

Геометрически это означает, что каждая вертикальная прямая $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ пересекает границу области D только в двух точках M_1 и M_2 (рис. 1), которые называются соответственно точкой входа и точкой выхода. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Если же область D (рис. 2) можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$$

то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

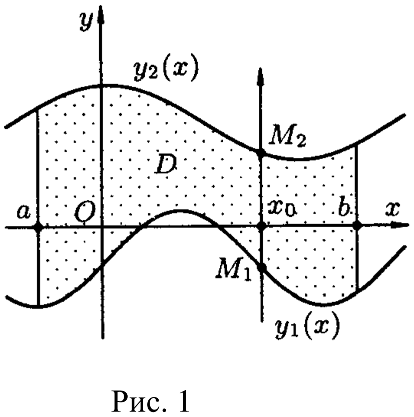


Рис. 1

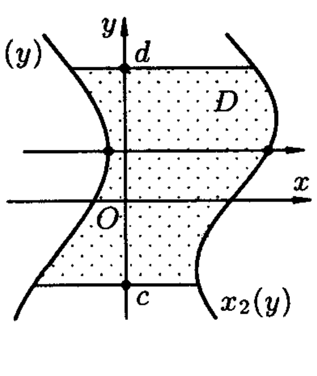


Рис. 2

Перечислим *основные свойства двойных интегралов*:

1. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D и $k = const$, то

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy.$$

2. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, то

$$\iint_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy.$$

3. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Примеры решения задач

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy\,.$$

Решение. Область интегрирования состоит из двух областей D_1 и D_2 (рис. 3), задаваемые неравенствами

$$D_1 = \left\{(x,y): \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{matrix}\right\}, \quad D_2 = \left\{(x,y): \begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{matrix}\right\}.$$

Решаем системы неравенств, определяющих области D_1 и D_2, относительно x и получаем $y^2 \le x \le 1, 1 \le x \le 2-y$. Определяем границы изменения y, решая неравенства $y^2 \le 1, 1 \le 2-y$. Учитывая, что $y \ge 0$, в обоих случаях получаем $0 \le y \le 1$.

Области D_1 и D_2 можно представить виде

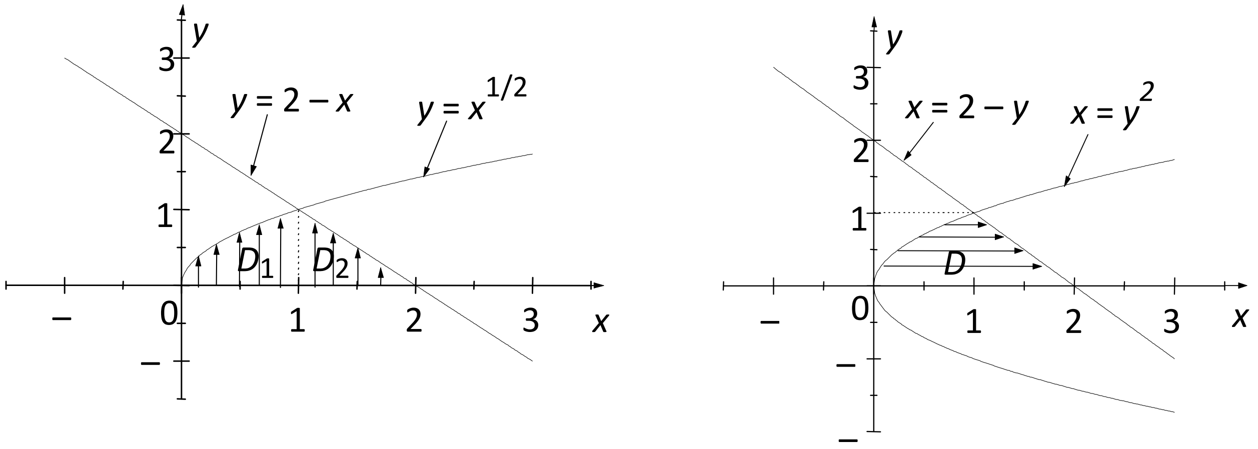
$$D_1 = \left\{(x,y): \begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 1 \end{matrix}\right\}, \qquad D_2 = \left\{(x,y): \begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ 1 \le x \le 2-y \end{matrix}\right\}.$$

Записываем интегралы с измененным порядком интегрирования:

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_1^{2-y} f(x,y)dx\,.$$

Пользуясь линейностью и аддитивностью интегралов, получаем

$$I=\int\limits_0^1 dy\left\{\int\limits_{y^2}^1 f(x,y)dx+\int\limits_1^{2-y} f(x,y)dx\right\}=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx.$$



а) *б*)

Рис. 3

Ответ: $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

$$\iint\limits_D y\ln x dxdy,\quad D: y=\frac{1}{x},\ y=\sqrt{x},\ x=2.$$

Решение. Изобразим область интегрирования *D* (см. рис. 4). Она правильная в направлении *Oy*. Из рисунка видно, что $\frac{1}{x}\le y\le\sqrt{x}$, а $1\le x\le 2$, где левую границу для переменной *x* нашли как точку пересечения $\frac{1}{x}$ и $\sqrt{x}$. Переходим от двойного интеграла к повторному

$$\iint\limits_D y\ln x dxdy=\int\limits_1^2 \ln x dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} ydy=\int\limits_1^2 \ln x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_{1/x}^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \ln x\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

{используем формулу интегрирования по частям}

$$=\left\{\begin{aligned} & u=\ln x,\ dv=\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx \\ & du=\frac{dx}{x},\ v=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2}+1\right)\ln 1-\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$\frac{5}{4}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{4}\ln 2-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{4}-1\right)\right\}=\frac{5}{4}\ln 2-\frac{5}{8}.$$

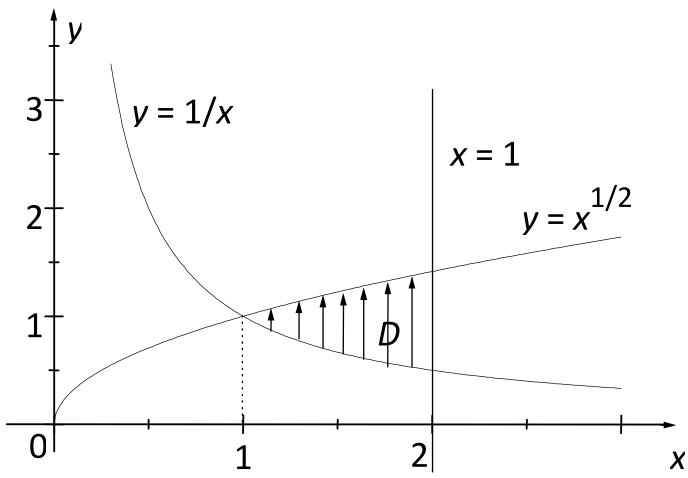


Рис. 4

Ответ: $\iint\limits_D y\ln x dxdy=\frac{5}{4}\ln 2-\frac{5}{8}$.

3. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

$$\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy,\ D\colon x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}.$$

Решение. На рис. 5 изображена область интегрирования D. Здесь удобнее интегрировать в направлении оси Ox, поэтому

$$\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y^2dy\int\limits_0^{2y}\sin\frac{xy}{2}dx=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y^2\left(-\frac{2\cos\frac{xy}{2}}{y}\right)\Bigg|_0^{2y}dy=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(y-y\cos\frac{y^2}{2}\right)dy=2\int_0^{\sqrt{\pi}}ydy-2\int_0^{\sqrt{\pi}}y\cos\frac{y^2}{2}dy=y^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}-2\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos\frac{y^2}{2}d\,\frac{y^2}{2}=$$

$$=\pi-2\sin\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}}=\pi-2\sin\frac{\pi}{2}=\pi-2.$$

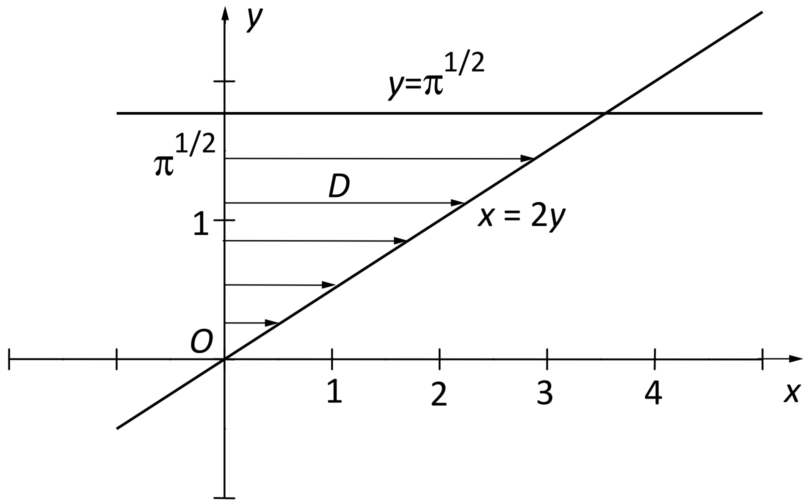


Рис. 5

Ответ: $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy=\pi-2$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, если область D – прямоугольник $0\le x\le 1$, $1\le y\le 2$.

Решение. Поскольку пределы интегрирования постоянные величины, область интегрирования является стандартной и относительно оси Ox, и относительно оси Oy. Первое интегрирование может быть по любой переменной. Сводим двойной интеграл к повторному

$$\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=\int_0^1 dx\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2}.$$

Вычислим внутренний интеграл по *y*, считая *x* постоянной величиной и используя формулу Ньютона-Лейбница,

$$\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=-\int_0^1\frac{1}{x+y}\Bigg|_1^2dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по x

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^1 =$$

$$\ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \ln\frac{4}{3}.$

5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+3y^2)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$. Решить двумя способами, изменив порядок интегрирования.

Решение. Рассмотрим в этой задаче два способа расстановки пределов.

а) Изобразим область D в декартовой системе координат (рис. 6), она является стандартной относительно оси Oy.

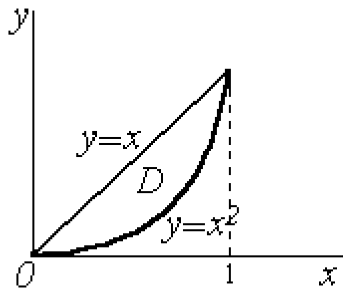


Рис. 6

Сводим двойной интеграл к повторному

$$\iint_D (x+3y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x+3y^2\right)dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл в повторном, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x^2}^{x} \left(x+3y^2\right)dy = \left(xy+y^3\right)\Big|_{x^2}^{x} = x^2 - x^6.$$

Теперь вычисляем внешний интеграл:

$$\iint_D (x+3y^2)dxdy = \int_0^1 \left(x^2 - x^6\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

б) Для области, стандартной относительно оси Ox, запишем уравнения кривых $y = x$ и $y = x^2$, ограничивающих область D (рис. 6), в виде $x = x(y)$, получим $x = y$ и $x = \sqrt{y}$. Тогда повторный интеграл по области, стандартной относительно оси Ox, запишется в виде

$$\iint_D (x+3y^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x+3y^2)dx.$$

Интегрируя, получим

$$\iint_D (x+3y^2)dxdy = \int_0^1 dy\left(\left(\frac{x^2}{2} + 3xy^2\right)\Bigg|_y^{\sqrt{y}}\right) = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + 3y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{2} - 3y^3\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} + \frac{6}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{y^3}{6} - \frac{3y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

Ответы, полученные при изменении порядка интегрирования, совпали, что является проверкой правильности вычислений.

Ответ: $\iint_D (x+3y^2)dxdy = \frac{4}{21}$.

6. Вычислить $\iint_D xdxdy$ по области, ограниченной линиями $y = 0$, $y = x^2$, $x + y = 2$. Решить двумя способами, изменив порядок интегрирования.

Решение. Построим область D в декартовой системе координат (рис. 7).

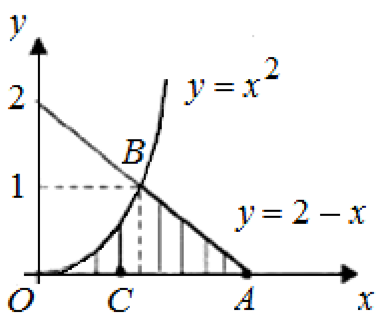


Рис. 7

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$, находим точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x + y = 2$, лежащую в первом квадранте, B(1; 1).

а) Решим, считая область правильной относительно оси *Oy*. В этом случае область разбивается на две подобласти: *OBC* и *CBA*, так как линия *OBA* задается разными уравнениями. Отсюда,

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} x\,dy .$$

Вычислим повторный интеграл

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^1 xy\Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 xy\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{11}{12} .$$

б) Решим, считая область правильной относительно оси *Ox*. Тогда,

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4 - 5y + y^2)dy = \frac{11}{12} .$$

Ответ: $\iint\limits_D xdxdy = \frac{11}{12}$.