ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

Поверхностный интеграл первого рода, его приложения

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода по поверхности можно свести к вычислению двойного интеграла по области. Приведем формулы для случаев явного задания поверхности.

Пусть поверхность Σ задана уравнением $z = f(x, y)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} g(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y . \qquad (1)$$

Если поверхность Σ задана уравнением $x = f(y, z)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{E} g(f(y, z), y, z)\sqrt{1 + f_y'^2(y, z) + f_z'^2(y, z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z . \qquad (2)$$

Пусть поверхность Σ задана уравнением $y = f(x, z)$, тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{G} g(x, f(x, z), z)\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_z'^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z . \qquad (3)$$

Приведем *основные свойства поверхностных интегралов первого рода*:

1) $\iint\limits_{\Sigma} Cg(M)\mathrm{d}\sigma = C\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma$, где C - число;

2) $\iint\limits_{\Sigma} (g_1(M) + g_2(M))\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Sigma} g_1(M)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\Sigma} g_2(M)\mathrm{d}\sigma$;

3) $\iint\limits_{\Sigma} g(M)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} g(M)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} g(M)\mathrm{d}\sigma$, где $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Приведем некоторые *геометрические и механические приложения поверхностных интегралов первого рода*.

1) Площадь поверхности: $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma = S$, где S - площадь поверхности Σ.

2) Масса поверхности: $m = \iint\limits_{\Sigma} \rho(M)\mathrm{d}\sigma$, где $\rho(M) = \rho(x, y, z)$- поверхностная плотность массы, распределенной по поверхности Σ.

Примеры решения задач

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{1}{6}y+z\right)\mathrm{d}\sigma$, где Σ - часть плоскости $2x+\frac{1}{2}y+z=1$, расположенная в первом октанте.

Решение. Поверхность Σ взаимно однозначно проектируется на область D - треугольник на координатной плоскости Oxy (рис.1). Уравнение $z=1-2x-\frac{1}{2}y$, $(x,\ y)\in D$, - явное задание поверхности Σ. Найдем частные производные функции $f(x,\ y)=1-2x-\frac{1}{2}y$:

$$f'_x(x,\ y)=-2\,,\ f'_y(x,\ y)=-\frac{1}{2}\,.$$

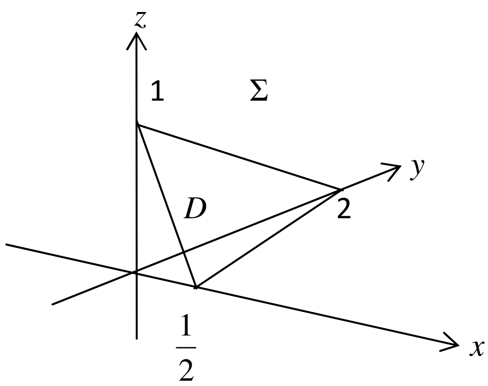

Рис.1

Применяя формулу (1), получим

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{1}{6}y+z\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\left(x+\frac{1}{6}y+1-2x-\frac{1}{2}y\right)\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}\iint\limits_{D}\left(1-x-\frac{1}{3}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Вычислим двойной интеграл. Имеем: $D=\left\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le\frac{1}{2},\ 0\le y\le 2(1-2x)\right\}$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{1}{6}y+z\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int\limits_0^{2(1-2x)}\left(1-x-\frac{1}{3}y\right)\mathrm{d}y\,.$$

Отдельно найдем внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{2(1-2x)}\left(1-x-\frac{1}{3}y\right)\mathrm{d}y=(1-x)\int\limits_0^{2(1-2x)}\mathrm{d}y-\frac{1}{3}\int\limits_0^{2(1-2x)}y\mathrm{d}y=(1-x)y\Big|_0^{2(1-2x)}-\frac{1}{6}y^2\Big|_0^{2(1-2x)}=$$

$$=2(1-x)(1-2x)-\frac{2}{3}(1-2x)^2=2\left(1-2x-x+2x^2-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(2-5x+2x^2\right),$$

отсюда,

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{1}{6}y+z\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(2-5x+2x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{21}}{3}\left(2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-5\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{3}\left(2x-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}\left(1-\frac{5}{8}+\frac{1}{12}\right)=\frac{\sqrt{21}}{3}\cdot\frac{11}{24}=\frac{11\sqrt{21}}{72}.$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{31}}{72}$**.**

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)\mathrm{d}\sigma$, где Σ - часть конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенная внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

Решение. Поверхность Σ взаимно однозначно проектируется на круг $D=\left\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ плоскости Oxy (рис. 2). Найдем частные производные функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Исходный интеграл обозначим буквой « I » и применим формулу (1):

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2y^2+x^2\left(x^2+y^2\right)+y^2\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$= \iint\limits_D \left(x^2y^2 + x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4\right)\sqrt{\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + x^4 + y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

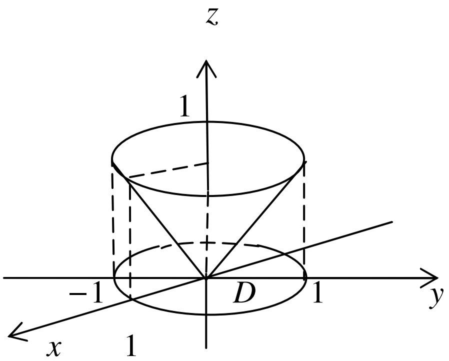

Рис. 2

Двойной интеграл вычислим, применяя полярные координаты. Область $\tilde{D} = \{(\varphi,\, r) \mid -\pi < \varphi \le \pi,\, 0 \le r \le 1\}$ системы координат $O\varphi r$ отображается на область D с помощью функций $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с якобианом, равным r. Тогда

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_{\tilde{D}} \left(3r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi + r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi\right)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_{\tilde{D}} \left(3\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right)r^5\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}r \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(3\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^4\phi + \sin^4\phi\right)r^5\mathrm{d}\phi = \sqrt{2}\int\limits_0^1 r^5\mathrm{d}r \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(3\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^4\phi + \sin^4\phi\right)\mathrm{d}\phi =$$

$$= \sqrt{2}\left(\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^1\right)\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\left(3\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^4\phi + \sin^4\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^{\pi}\left(3\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^4\phi + \sin^4\phi\right)\mathrm{d}\phi\,.$$

Преобразуем подынтегральную функцию последнего интеграла:

$$3\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = \cos^4\varphi + 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi =$$

$$= \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^2 + \cos^2\varphi\sin^2\varphi = 1 + \frac{1}{4}(2\cos\varphi\sin\varphi)^2 = 1 + \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi =$$

$$=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\varphi}{2}=1+\frac{1}{8}-\frac{\cos 4\varphi}{8}=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cos 4\varphi=\frac{1}{8}(9-\cos 4\varphi).$$

С учетом полученных преобразований продолжим вычисления:

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(9-\cos 4\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{24}\left(9\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\pi}\cos 4\varphi\mathrm{d}\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{24}\left(9\varphi\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 4\varphi\mathrm{d}4\varphi\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{24}\left(9\pi-\frac{1}{4}\sin 4\phi\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{9\sqrt{2}\pi}{24}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}\pi}{24}$.

3. Вычислить массу материальной полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$, плотность которой $\rho(M)=\frac{z}{a}$.

Решение. Пусть m - искомая масса поверхности, обозначим ее буквой «Σ». По формуле массы поверхности имеем:

$$m=\iint_{\Sigma}\frac{z}{a}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}\sigma.$$

Поверхность Σ, которую можно задать явно уравнением $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, взаимно однозначно проектируется на круг $D=\{(x,\, y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$ (рис. 3). Найдем частные производные:

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\; z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

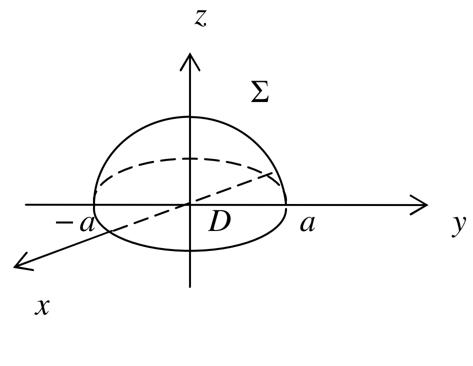

Рис. 3

Вычислим массу поверхности:

$$m=\frac{1}{a}\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2.$$

Ответ. πa^2.

4. Вычислить площадь части параболоида $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3$.

Решение. Часть параболоида, заключенная внутри цилиндра, взаимно однозначно проектируется на круг $D=\left\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\le 3\right\}$ (рис. 4).

Положим: $f(x,\ y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$. Имеем: $f'_x(x,\ y)=x,\ f'_y(x,\ y)=y$. Для вычисления площади применим формулу для случая поверхности с явным заданием:

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x'^2(x,\ y)+f'^2{}_y(x,\ y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

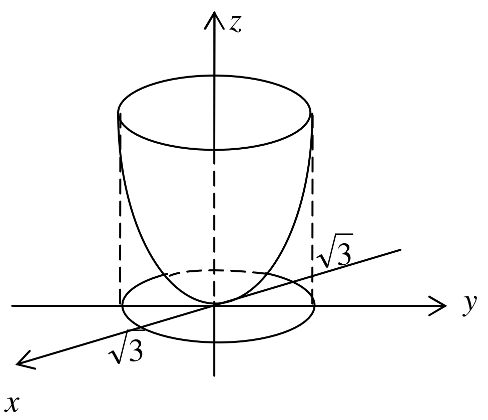

Рис. 4

Интеграл вычислим, применяя полярные координаты φ и r. Пусть $\tilde{D}$ - область в системе координат $O\varphi r$, которая отображается на область D с помощью функций $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ с якобианом, равным r. Поскольку $\tilde{D}=\left\{(\varphi,\ r)\mid -\pi<\varphi\le\pi,\ 0\le r\le\sqrt{3}\right\}$, то

$$S=\iint\limits_{\tilde{D}}\sqrt{1+r^2\cos^2x+r^2\sin^2y}\,r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=\iint\limits_{\tilde{D}}\sqrt{1+r^2}\,r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+r^2}\,r\mathrm{d}r=$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(1+r^2\right) = \varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{0}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[\left(1+\sqrt{3}^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{2}{3}\pi(8-1) = \frac{14}{3}\pi .$$

Ответ: $\frac{14}{3}\pi$**.**

5. Вычислить площадь цилиндрической поверхности $x = 1-2z^2$, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=1$, $y=2$.

Решение. Поверхность взаимно однозначно проектируется на область $G = \left\{(y, z) | 1 \le y \le 2, -\frac{\sqrt{2}}{2} \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ (рис. 5). Пусть $f(y, z) = 1-2z^2$ и S - искомая величина площади. Имеем:

$$f'_y(y, z) = 0,\ f'_z(y, z) = -4z .$$

Тогда

$$S = \iint_G \sqrt{1+f_y'^2(y, z)+f_z'^2(y, z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_G \sqrt{1+16z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+16z^2}\mathrm{d}z = \int_1^2 \mathrm{d}y \cdot 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+16z^2}\mathrm{d}z = 2y\Big|_1^2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+16z^2}\mathrm{d}z = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+16z^2}\mathrm{d}z .$$

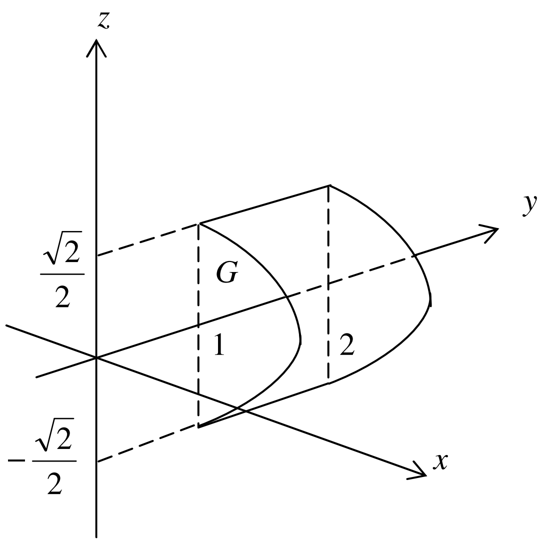

Рис. 5

Последний интеграл обозначим через I. Вводим замену переменной в интеграле, положив $z=\frac{1}{4}t$. Поскольку $\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\mathrm{d}t$, $0\le t\le 2\sqrt{2}$, то

$$I=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Теперь применим метод интегрирования по частям.

$$u=\sqrt{1+t^2}\,,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}u=\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ v=t\,,$$

$$I=\frac{1}{4}\left(t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}-\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\cdot 3-\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(6\sqrt{2}-\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I+\frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I+\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right),$$

отсюда,

$$I=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I+\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right),\ 2I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right).$$

Следовательно,

$$S=2I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right).$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)$.